МАТЕМАТИКА

Министерство образования и науки Российской Федерации
Байкальский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Курс лекций

Учебное пособие для студентов очной
и заочной форм обучения направления
43.03.02 Туристский и гостиничный бизнес

Иркутск
Издательство БГУ
2018

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7
Л59

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доц. С.В. Тимофеев,
канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Аксенюшкина.

Леонова О.В.
Л59 Математика. Курс лекций [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов очной и заочной форм обучения направления 43.03.02 Туристский и гостиничный бизнес / О.В. Леонова, Н.П. Шерстянкина. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2018. – 154 с. – Режим доступа: lib-catalog@bgu.ru.

Учебное пособие представляет собой полный курс лекций по дисциплине «Математика» для студентов направления 43.03.02 Туристский и гостиничный бизнес. Содержит теоретический материал, примеры задач, вопросы для самоподготовки.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7

Оглавление

Раздел 1. Основы линейной алгебры

Линейная алгебра – раздел алгебры, изучающий объекты линейной природы: векторные (или линейные) пространства, линейные отображения, системы линейных уравнений, среди основных инструментов, используемых в линейной алгебре – определители, матрицы, матричные операции.

Линейная алгебра нашла широкое применение в многочисленных приложениях в том числе, в линейном программировании, эконометрике и естественных науках. Используя MS Excel и алгебраические операции, можно решать различные экономические задачи.

1. Векторы и операции над ними

1.1. Понятие n-мерного вектора

***Определение* 1.1.** Вектором размерности n или n-мерным вектором называется любой упорядоченный набор из n чисел. Эти числа называются координатами или компонентами вектора: вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

***Пример* 1.1.** $a = (2;5)$, $b = (-3;10)$ – это двумерные вектора, координаты которых соответственно равны $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $b_1 = -3$, $b_2 = -10$.

$c = (3;7;-11)$ – трехмерный вектор, координаты которого равны $c_1 = 3$, $c_2 = 7$, $c_3 = -11$.

***Определение* 1.2.** Совокупность всех векторов размерности n называется n-мерным векторным пространством R^n.

***Пример* 1.2.** $a \in R^2$, $b \in R^2$, $c \in R^3$ (по данным примера 1.1).

Координаты вектора можно расположить либо в строку

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad (1.1)$$

либо в столбец

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Тогда (1.1) – это вектор-строка, (1,2) – это вектор-столбец.

***Определение* 1.3.** Два n-мерных вектора a и b называются равными, если их соответствующие координаты равны:

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$.

***Определение* 1.4.** Вектор, все координаты которого равны нулю, называется нулевым вектором $0 = (0,0,...,0)$.

Понятие вектора можно отождествлять с понятием точки. Известно, что любая точка, например, в пространстве R^2 имеет две координаты.

***Пример* 1.3.** Возьмем точку $A(3;5)$. Изобразим ее на координатной плоскости:

Если точку A соединить с началом координат $O(0;0)$ направленным отрезком OA и обозначить направленный отрезок OA буквой a, то получим вектор a.

Таким образом, точка $A(3;5)$ отождествляется с вектором $a=(3;5)$. Их координаты совпадают (рис. 1.1).

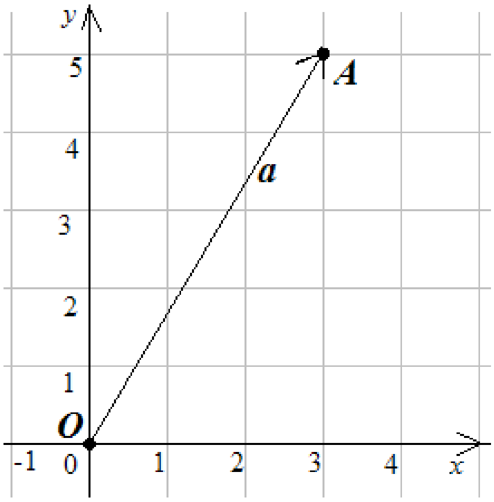


Рис. 1.1. Графическое изображение вектора a

1.2. Арифметические действия с векторами

Пусть $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ – произвольные n-мерные векторы.

Суммой векторов a и b называется вектор c, координаты которого получены суммированием соответствующих координат векторов a и b:

$c=a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,....,a_n+b_n)$.

***Пример* 1.4.** Даны векторы $a=(0;3;-2)$ и $b=(-1;5;8)$. Найдем вектор $c=a+b$:

$c=a+b=(0+(-1);3+5;-2+8)=(-1;8;6)$.

Разностью векторов a и b называется вектор $c=a-b$, координаты которого получены вычитанием соответствующих координат векторов a и b:

$c=a-b=(a_1-b_1,a_2-b_2,....,a_n-b_n)$.

***Пример* 1.5.** Даны векторы $a=(0;3;-2)$ и $b=(-1;5;8)$. Найдем вектор $c=a-b$:

$c=a-b=(0-(-1);3+5;-2-8)=(1;-2;-10)$.

Произведением вектора a **на число** α называется вектор αa, координаты которого получены умножением на число α:

$\alpha a=(\alpha a_1,\alpha a_2,...,\alpha a_n)$.

***Пример* 1.6.** Дан вектор $a=(0;3;-2)$, $\alpha=5$. Найдем вектор $5a$:

$5a=(5\cdot 0;5\cdot 3;5\cdot(-2))=(0;15;-10)$.

Свойства арифметических операций:
1) $a+b=b+a$;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$;
4) $(\alpha_1+\alpha_2)a=\alpha_1 a+\alpha_2 a$;
5) $\alpha_1(\alpha_2 a)=(\alpha_1\alpha_2)a$;
6) для любого вектора a существует вектор $-a$:
$-a=-1\cdot a$, $a+(-a)=a-a=0$.

1.3. Скалярное произведение векторов

***Определение* 1.5.** Скалярным произведением векторов $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ одинаковой размерности называется число, которое обозначается через $<a;b>$ и определяется равенством:

$$<a;b>=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+...+a_n\cdot b_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i \tag{1.3}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов (1.3) – это сумма произведений соответствующих координат векторов.

***Пример* 1.7.** Даны векторы $a=(2;-1;10)$ и $b=(6;7;1)$. Найдем скалярное произведение этих векторов по формуле (1.3):
$<a;b>=2\cdot 6+(-1)\cdot 7+10\cdot 1=12-7+10=-5$.

Из формулы (1.3) вытекают свойства скалярного произведения:
1) $<a;b>=<b;a>$;
2) $<\alpha a;b>=<a;\alpha b>=\alpha<a;b>$;
3) $<a;b+c>=<a;b>+<a;c>$;
4) $<a;a>>0$, если $a\neq 0$, $<a;a>=0$, $a=0$.

1.4. Расстояние между векторами

***Определение* 1.6.** Длиной или нормой вектора называется число $\|a\|=|a|=\sqrt{<a;a>}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$.

***Пример* 1.8.** Дан вектор $a=(1;-2;0;5;3;-5)$. Найдем его длину:

$$\|a\|=|a|=\sqrt{<a;a>}=\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2+3^2+(-5)^2}=\sqrt{1+4+0+25+9+25}=$$
$$=\sqrt{64}=8.$$

***Определение* 1.7.** Расстояние между векторами (точками) $a\in R^n$, $b\in R^n$ равно длине вектора $a-b$ или $b-a$:

$$\|a-b\|=\sqrt{<a-b;a-b>}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+...+(a_n-b_n)^2} \tag{1.4}$$

***Пример* 1.9.** Найти расстояние между векторами $a=(2;0;-1;5;-3;1)$, $b=(4;-2;7;2;3;-1)$.

Используем формулу (1.4):

$$\|a-b\| = \sqrt{(2-4)^2 + (0-(-2))^2 + (-1-7)^2. + (5-2)^2 + (-3-3)^2 + (1+1)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2 + 3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+64+9+36+4} = \sqrt{121} = 11.$$

1.5. Угол между векторами

Из школьного курса геометрии известно, что скалярное произведение двух векторов определяется по формуле:

$$<a;b> = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi \qquad (1.5)$$

где φ – это угол между векторами a и b:

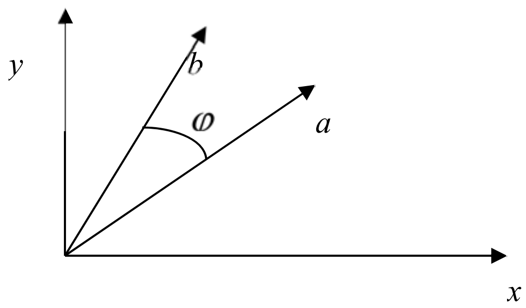


Рис. 1.2. Угол между векторами

Из формулы (1.5) найдем косинус угла φ между векторами a и b:

$$\cos\varphi = \frac{<a;b>}{\|a\| \cdot \|b\|}.$$

***Пример* 1.10.** Найти угол между векторами $a = (1;4;-2;2)$ и $b = (3;1;1;5)$.

$<a;b> = 1\cdot 3 + 4\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot 5 = 3+4-2+10 = 15$,

$\|a\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+16+4+4} = \sqrt{25} = 5$,

$\|b\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{9+1+1+25} = \sqrt{36} = 6$,

отсюда по формуле (1.5):

$\cos\varphi = \frac{15}{5\cdot 6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, угол $\varphi = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 30^\circ$.

***Определение* 1.8.** Векторы a и b называются ортогональными (перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю: $<a;b> = 0$.

***Пример* 1.11.** Найти угол между векторами $a = (1;3;4)$ и $b = (-4;0;1)$.

$<a;b> = 1\cdot(-4) + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 = -4+0+4 = 0$,

$\|a\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$,

$\|b\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{16+0+1} = \sqrt{17}$,

$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}} = 0$, $\varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

1.6. Линейная комбинация векторов

***Определение* 1.9.** Линейная комбинация векторов $a, b \in R^n$ называется вектор вида $c = \alpha a + \beta b$, где α и β – произвольные, отличные от нуля числа, коэффициенты данной линейной комбинации.

В общем случае: линейной комбинацией векторов $a^1, a^2, ..., a^k \in R^n$ называется любой вектор вида:

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – числа, коэффициенты данной линейной комбинации.

***Определение* 1.10.** Векторы $a^1, a^2, ..., a^k \in R^n$ называются линейно-зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, среди которых имеются ненулевые, такие что выполняется равенство:

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k = 0. \tag{1.6}$$

Если же равенство (1.6) выполняется только для всех $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, равных нулю, то векторы $a^1, a^2, ..., a^k \in R^n$ – линейно-независимы.

***Пример* 1.11.** Установить, являются ли векторы линейно-зависимыми:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Составим линейную комбинацию по формуле (1.6):

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$. Распишем ее покоординатно:

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (-1) + \lambda_3 \cdot (-1) = 0,$$
$$\lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot 8 = 0,$$
$$\lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 7 = 0.$$

Найдем решение системы, исключая переменные. Для этого первое уравнение умножим на (–2) и сложим со вторым:

$$-2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) = 0,$$
$$\lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot 8 = 0, \Rightarrow$$
$$\lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 7 = 0.$$

$$5\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0, \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-10\lambda_3}{5} = -2\lambda_3,$$

$$3\lambda_1 + 2 \cdot (-2\lambda_3) + 7\lambda_3 = 3\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3.$$

Подставим все в первое уравнение:

$-\lambda_3 + 2\lambda_3 - \lambda_3 = 0, \Rightarrow 0 = 0$, значит, существует линейная комбинация векторов, где $\lambda_1 = -c, \lambda_2 = -2c, \lambda_3 = c$, где с – произвольная постоянная, не равная нулю. Следовательно, векторы $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ линейно-зависимы.

Примеры решения задач

1.1. Даны векторы: $a = (-3;2;-1;4;5)$ и $b = (1;-2;5;6;8)$. Найти: а) расстояние между ними, б) их скалярное произведение.

Решение.

а) расстояние между векторами определяется по формуле (1.4):

$$d = \sqrt{(-3-1)^2 + (2+2)^2 + (-1-5)^2 + (4-6)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{16+16+36+4+9} = 9.$$

б) скалярное произведение, формула (1.3):

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

$$\langle a, b \rangle = -3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = -3 - 4 - 5 + 24 + 40 = 52.$$

1.2. Даны векторы $a = (0;5;-2;3;-4,1,-3)$ и $b = (-1;2;3;-4;-2;1;-1)$. Найти косинус угла между ними.

Решение.

Из формулы (1.5) $\cos\varphi = \dfrac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|}$, $\quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Сначала вычислим скалярное произведение векторов:

$$\langle a, b \rangle = 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) =$$
$$= 10 - 6 - 12 + 8 + 1 + 3 = 4.$$

Затем длины векторов:

$$|a| = \sqrt{0 + 25 + 4 + 9 + 16 + 1 + 9} = \sqrt{64} = 8,$$

$$|a| = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{36} = 6.$$

Отсюда:

$$\cos\varphi = \frac{4}{8 \cdot 6} = \frac{1}{12}, \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{12}.$$

1.3. При каком значении x векторы $a = (6;-4;8)$ и $b = (x;2;-4)$ будут:

а) коллинеарны, б) перпендикулярны.

Решение.

а) условие коллинеарности векторов:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}, \text{ тогда } \frac{x}{6} = \frac{2}{-4} = \frac{-4}{8}, \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{-1}{2}, \ x = -\frac{6}{2} = -3.$$

Таким образом, при $x = -3$ векторы a и b будут коллинеарны.

б) условие перпендикулярности векторов:

$\langle a,b \rangle = 0$, тогда $\langle a,b \rangle = 6x + (-4) \cdot 2 + 8 \cdot (-4) = 0$, $\Rightarrow 6x - 8 - 32 = 0$,

$\Rightarrow x = \dfrac{40}{6} = 6\dfrac{2}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие n-мерного вектора и n-мерного пространства.
2. Выпишите арифметические операции над векторами и их свойства.
3. Выпишите скалярное произведение векторов и его свойства.
4. Что означает норма или длина вектора?
5. Как найти расстояние и угол между векторами?
6. Какие векторы называются линейно-зависимыми и линейно-независимыми?
7. Объясните условие коллинеарности и перпендикулярности векторов.
8. При каком значении λ векторы $a = (2\lambda; \lambda^2 - 1; 3)$ и $b = (2; 0; 3\lambda)$ равны между собой?
9. Даны векторы $a = (2;3;0)$, $b = (2;-1;3)$ и $c = (3;-1;5)$. Найдите координаты векторов:

а) *a+b;*
б) *3b;*
в) *a-2c.*

10. Дан вектор $b = (4;0;-3)$. Найдите вектор: а) противоположный данному; б) единичный, одинаково направленный с данным; в) единичный, противоположно направленный данному.
11. Можно ли складывать и вычитать векторы из пространств различной размерности?
12. Являются ли параллельными или ортогональными векторы:

а) $a = (3;0;1;-1)$ и $b = (-2;5;6;0)$;
б) *a* и *c=4a*?

13. Вычислите длины векторов $a = (3;0;1;-1)$, $b = (-2;5;6;0)$ и скалярное произведение между векторами. Являются ли данные вектора линейно зависимыми?
14. Длина n-мерного вектора находится как:

1) сумма квадратов его координат;
2) разность между первой и последней координатой;
3) корень квадратный из суммы квадратов его координат;
4) сумма его координат.

15. Какие из нижеперечисленных векторов относятся к векторному пространству R^5:

1) (5; 5; 5; 5);
2) (1; 5; 0; -6; 3);
3) (1; 0; 1; 0; 1);

4) (-5; -4; -3; -2; -1; 0);
5) все перечисленные векторы.

16. Скалярное произведение векторов: $a = (0;-2;6;-6;3)$ и $b = (5;1;-3;3;5)$ равно:

1) $\langle a, b \rangle = (0;-2;-18;-18;15)$;
2) $\langle a, b \rangle = -23$;
3) $\langle a, b \rangle = 23$;
4) $\langle a, b \rangle = 10\sqrt{2}$.

17. Какой из перечисленных векторов будет нулевым:

1) длина которого равна нулю;
2) сумма координат которого равна 0;
3) все координаты которого равны 0;
4) который с осью *OX* образует угол 0 градусов.

18. Расстояние между векторами $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ находится как:

1) длина вектора $(x - y)$;
2) разность длин этих векторов;
3) скалярное произведение этих векторов;
4) $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$.

19. Векторы $x = (2;-1;3;2;5)$ и $y = (4;-2;6;4;10)$:

1) имеют одинаковую длину;
2) ортогональны;
3) коллинеарны;
4) $\langle x, y \rangle = 2|x|^2$.

20. Даны векторы $x = (2;-3;5;1;6)$ и $y = (2;2;-6;0;-2)$. Тогда $|x| - |y| =$:

1) 0;
2) $5\sqrt{3}$;
3) $\sqrt{3}$;
4) $4\sqrt{3}$.

21. Даны векторы $x = (2;-3;5;1;6)$ и $y = (2;2;-6;0;-2)$. Тогда $3|x| - |y| =$:

1) $-5\sqrt{2}$;
2) $5\sqrt{2}$;
3) 0;
4) 42

2. Матрицы и операции над ними

2.1. Понятие матрицы

***Определение* 2.1.** Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}.$$

Числа a_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$ называются элементами матрицы. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: индекс i указывает номер строки, индекс j – номер столбца, в которых расположен элемент.

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C и т.д., а их элементы – строчными буквами a, b, c и т.д.

***Пример* 2.1.** Примеры матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 10 \\ 11 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

***Определение* 2.2.** Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

Говорят, что матрица A имеет размерность $m \times n$, если она состоит из m строк и n столбцов: $A_{(m\times n)}$.

Продолжение примера 2.1. Матрицы имеют следующие размерности:

$A_{(2\times 2)}$, $B_{(2\times 3)}$, $C_{(3\times 3)}$.

Если $m \neq n$, то матрица A – прямоугольная. Если $m = n$, то матрица A – квадратная порядка n:

$$A_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В примере 2.1 матрицы A и C – квадратные: A порядка 2, C порядка 2.

***Определение* 2.2.** Совокупность всех элементов a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратной матрицы A называется главной диагональю:

$$A_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побочная диагональ главная диагональ

В примере 2.1 В матрице C главную диагональ составляют элементы: 0; –5; 8, побочную диагональ: 2; –5; 11.

***Определение* 2.4.** Квадратная матрица A называется диагональной, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, а элементы главной диагонали отличны от нуля:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

***Определение* 2.5.** Квадратная матрица A называется симметричной, если $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1,2,\dots,n$.

Пример 2.2. Симметричная матрица четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & -6 & -8 & 9 \\ -4 & 7 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

***Определение* 2.6.** Диагональная матрица**,** у которой все элементы, расположенные вдоль главной диагонали равны 1, называется единичной матрицей и обозначается E:

$$E_{(2\times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{(3\times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \dots,\ E_{(n\times n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Арифметические действия над матрицами

1) Равенство матриц.

***Определение* 2.6.** Две матрицы A и B называются равными, если они имеет одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$.

***Пример* 2.3.** Из приведенных матриц указать равные:

$A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -6 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 4 & 10 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -6 & 4\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 4 & 10 & 0\end{bmatrix}$.

Равными являются пары матриц A и C, B и D.

2) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$\lambda\cdot A=A\cdot\lambda=\left[\lambda\cdot a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n}}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n}\\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n}\\ \vdots & & & \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn}\end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Формулу (2.1) можно иначе понимать так: общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

3) Сложение матриц. Суммой матриц одинаковой размерности $A_{(m\times n)}$ и $B_{(m\times n)}$ называется матрица, которая получается сложением соответствующих элементов слагаемых матриц:

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n}}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц:

$A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Пример 2.4. Найти $A+B$.

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & -2\end{bmatrix}$.

$A+B=\begin{bmatrix}1+0 & 3+5\\ -1+6 & 7+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 5 & 5\end{bmatrix}$.

4) Вычитание матриц. Разность матриц одинаковой размерности $A_{(m\times n)}$ и $B_{(m\times n)}$ определяется равенством: $A-B=A+(-B)=A+(-1)\cdot B$. С учетом операций 2) и 3) имеем:

$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix}.$$

***Пример* 2.5.** Найти $A-B$, если $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & -2\end{bmatrix}$.

$A-B=\begin{bmatrix}1-0 & 3-5\\ -1-6 & 7-(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -7 & 9\end{bmatrix}$.

5) Умножение матриц. Произведением матриц A размерности $(m\times n)$ и B размерности $(n\times k)$ называется матрица AB размерности $(m\times k)$, полученная по правилу: а) количество столбцов матрицы A должно совпадать с количеством строк матрицы B; б) каждая строка матрицы A умножается поочередно на все столбцы матрицы B, как скалярное произведение векторов:

$$A=[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ B=[b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k}\\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{n2} & \dots & b_{nk}\end{pmatrix}$$

$$AB=[(ab)_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,k}}=\begin{pmatrix} (ab)_{11} & (ab)_{12} & \dots & (ab)_{1k}\\ (ab)_{21} & (ab)_{22} & \dots & (ab)_{2k}\\ \vdots & & & \\ (ab)_{m1} & (ab)_{m2} & \dots & (ab)_{mk}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1k}+\dots+a_{1n}b_{nk}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1k}+\dots+a_{2n}b_{nk}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\dots+a_{mn}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{1k}+\dots+a_{mn}b_{nk}\end{pmatrix}$$

.

***Пример* 2.6.** Даны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 6\\ -3 & 8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 7 & 2\\ 9 & 10\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

а) определить для какой пары матриц допустима операция умножения;

б) найти произведение этих матриц.

Решение:

а) $A_{(2\times2)}$ и $B_{(3\times2)}$ – произведение матриц AB найти невозможно, так как число строк матрицы A не совпадает с числом столбцов матрицы B.

$B_{(3\times2)}$ и $A_{(2\times2)}$ – произведение матриц BA существует, матрица BA будет иметь размерность $(\mathbf{3}\times2)$.

$A_{(2\times2)}$ и $C_{(2\times3)}$ – произведение матриц AC существует, $AC_{(2\times3)}$.

$B_{(3\times2)}$ и $C_{(2\times3)}$ – произведение матриц BC существует, $BC_{(3\times3)}$.

$C_{(2\times3)}$ и $A_{(2\times2)}$ – произведение матриц CA не существует.

$C_{(2\times3)}$ и $B_{(3\times2)}$ – произведение матриц CB существует, $CB_{(2\times2)}$.

б) Найдем следующие матрицы: BA, AC, BC и CB (для удобства восприятия в первой матрице чертой отделяем строки, во второй - столбцы):

$$BA=\left[\begin{array}{cc}7 & 2\\ \hline 9 & 10\\ \hline 0 & 3\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c}1 & 6\\ -3 & 8\end{array}\right]=\begin{bmatrix}7\cdot1+2\cdot(-3) & 7\cdot6+2\cdot8\\ 9\cdot1+10\cdot(-3) & 9\cdot6+10\cdot8\\ 0\cdot1+3\cdot(-3) & 0\cdot6+3\cdot8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-6 & 42+16\\ 9-30 & 54+80\\ 0-9 & 0+24\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 58\\ -21 & 134\\ -9 & 24\end{bmatrix};$$

$$AC=\left[\begin{array}{cc}1 & 6\\ \hline -3 & 8\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c|c}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1\cdot7+6\cdot5 & 1\cdot5+6\cdot2 & 1\cdot1+6\cdot0\\ -3\cdot7+8\cdot5 & -3\cdot5+8\cdot2 & -3\cdot1+8\cdot0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7+30 & 5+12 & 1+0\\ -21+40 & -15+16 & -3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 17 & 1\\ 19 & 1 & -3\end{bmatrix};$$

$$BC=\left[\begin{array}{cc}7 & 2\\ \hline 9 & 10\\ \hline 0 & 3\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c|c}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}7\cdot7+2\cdot5 & 7\cdot5+2\cdot2 & 7\cdot1+2\cdot0\\ 9\cdot7+10\cdot5 & 9\cdot5+10\cdot2 & 9\cdot1+10\cdot0\\ 0\cdot7+3\cdot5 & 0\cdot5+3\cdot2 & 0\cdot1+3\cdot0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}49+10 & 35+4 & 7+0\\ 63+50 & 45+20 & 9+0\\ 0+15 & 0+6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}59 & 39 & 7\\ 113 & 65 & 9\\ 15 & 6 & 0\end{bmatrix};$$

$$CB=\left[\begin{array}{ccc}7 & 5 & 1\\ \hline 5 & 2 & 0\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c}7 & 2\\ 9 & 10\\ 0 & 3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}7\cdot7+5\cdot9+1\cdot0 & 7\cdot2+5\cdot10+1\cdot3\\ 5\cdot7+2\cdot9+0\cdot0 & 5\cdot2+2\cdot10+0\cdot3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}49+45+0 & 14+50+3\\ 35+18+0 & 10+20+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}95 & 67\\ 53 & 30\end{bmatrix}.$$

Свойства произведения матриц:

а) $A(BC)=(AB)C$;

б) $\lambda(AB)=(\lambda A)B$;

в) $(A+B)C=AB+AC$, $A(B+C)=AB+AC$.

Замечание 2.1. Равенство $AB=BA$ не всегда выполняется.

***Определение* 2.6.** Квадратные порядка n матрицы A и B называются перестановочными, если $AB=BA$.

***Пример* 2.7.** Если обратить внимание на произведение матриц B и C в примере 2.6, то видно, что они не являются перестановочными, так как $BC\neq CB$.

6) Транспонирование матриц – это замена строк матрицы ее столбцами с сохранением порядка.

В результате транспонирования матрицы $A_{(m\times n)}$ получим транспонированную матрицу $A^T_{(n\times m)}$.

***Пример* 2.8.** Дана матрица $A_{(2\times3)}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ -2 & 4 & -6\end{bmatrix}$. В результате транспонирования получим матрицу: $A_{(3\times2)}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\\ 5 & -6\end{bmatrix}$.

Примеры решения задач

2.1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 7 & 3 & 3\\ -9 & 4 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 5\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -3 & -3 & 1\\ -2 & -7 & 5\end{pmatrix}.$$

А) Вычислить AB^T.

Б) Найти $2B+3C-6E$.

Решение.

А) Сначала найдем матрицу $B^T=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 1\\ 5 & 2 & 7\end{pmatrix}$.

При умножении матриц число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строй второй, в матрице A – три столбца и в матрице B^T – три строки. В результате умножения AB^T получим матрицу, в которой будет четыре строки и три столбца:

$$AB^T=\left(\begin{array}{ccc}3 & -1 & -2\\ \hline 7 & 3 & 3\\ \hline -9 & 4 & 0\\ \hline 4 & -2 & 5\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c|c}5 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 1\\ 5 & 2 & 7\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot5-1\cdot3-2\cdot5 & 3\cdot1-1\cdot(-3)-2\cdot2 & 3\cdot2-1\cdot1-2\cdot7\\ 7\cdot5+3\cdot3+3\cdot5 & 7\cdot1+3\cdot(-3)+3\cdot2 & 7\cdot2+3\cdot1+3\cdot7\\ -9\cdot5+4\cdot3+0\cdot5 & -9\cdot1+4\cdot(-3)+0\cdot2 & -9\cdot2+4\cdot1+0\cdot7\\ 4\cdot5-2\cdot3+5\cdot5 & 4\cdot1-2\cdot(-3)+5\cdot2 & 4\cdot2-2\cdot1+5\cdot7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2 & -9\\ 59 & 18 & 38\\ -33 & -21 & -14\\ 39 & 20 & 41\end{pmatrix}.$$

2.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти $f(A)$, если $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$.

Решение. Вместо переменной x подставим A в многочлен $f(x)$, получим: $f(A) = -3A^2 + 2A + 4E$, где E – это единичная матрица размером 3×3.

Сначала найдем $A^2 = A \cdot A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot(-2)+4\cdot 6+0\cdot 3 & -2\cdot 4+4\cdot(-1)+0\cdot 2 & -2\cdot 0+4\cdot 9+0\cdot(-3) \\ 6\cdot(-2)-1\cdot 6+9\cdot 3 & 6\cdot 4-1\cdot(-1)+9\cdot 2 & 6\cdot 0-1\cdot 9+9\cdot(-3) \\ 3\cdot(-2)+2\cdot 6-3\cdot 3 & 3\cdot 4+2\cdot(-1)-3\cdot 2 & 3\cdot 0+2\cdot 9-3\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & -12 & 36 \\ 9 & 43 & -36 \\ -3 & 4 & 27 \end{pmatrix},$$

$$3A^2 = \begin{pmatrix} 28\cdot 3 & -12\cdot 3 & 36\cdot 3 \\ 9\cdot 3 & 43\cdot 3 & -36\cdot 3 \\ -3\cdot 3 & 4\cdot 3 & 27\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & -36 & 108 \\ 27 & 129 & -108 \\ -9 & 12 & 81 \end{pmatrix},$$

$$2A = \begin{pmatrix} -2\cdot 2 & 4\cdot 2 & 0\cdot 2 \\ 6\cdot 2 & -1\cdot 2 & 9\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 2\cdot 2 & -3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 12 & -2 & 18 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$-3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} -84 & 36 & -108 \\ -27 & -129 & 108 \\ 9 & -12 & -81 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 12 & -2 & 18 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -84-4 & 36+8 & -108+0 \\ -27+12 & -129-2 & 108+18 \\ 9+6 & -12+4 & -81-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -88 & 44 & -108 \\ -25 & -131 & 146 \\ 15 & -8 & -87 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = -3A^2 + 2A + 4E = \begin{pmatrix} -88 & 44 & -108 \\ -25 & -131 & 146 \\ 15 & -8 & -87 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -84 & 44 & -108 \\ -25 & -127 & 146 \\ 15 & -8 & -83 \end{pmatrix}.$$

2.3. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 6 & 10 & 3\\ 3 & -2 & -1 & 5 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\\ 3 & 4\\ 1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\\ D=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}\end{matrix}.$$

А) Вычислить AB. Б) Найти $\frac{1}{3}AB-6C+2D$.

Решение.

А) При нахождении произведения AB, убедимся, что число столбцов матрицы A (5 столбцов) совпадает с числом строк матрицы B (5 строк), в результате будет получена матрица из 2 строк и 2 столбцов (подробную запись умножения матриц смотрите в предыдущих примерах):

$$AB=\begin{pmatrix}6 & 1 & 6 & 10 & 3\\ 3 & -2 & -1 & 5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\\ 3 & 4\\ 1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 15\\ 12 & -12\end{pmatrix}.$$

Б) $\frac{1}{3}AB-6C+2D$:

$$\frac{1}{3}AB=\begin{pmatrix}\frac{30}{3} & \frac{15}{3}\\ \frac{12}{3} & \frac{-12}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 4 & -4\end{pmatrix},\ 6C=\begin{pmatrix}24 & -18\\ 30 & 12\end{pmatrix},\ 2D=\begin{pmatrix}10 & -2\\ -2 & 10\end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{3}AB-6C+2D=\begin{pmatrix}10-24+10 & 15+18-2\\ 4-30-2 & -4-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 31\\ -28 & -6\end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие матрицы.
2. Каких видов бывают матрицы?
3. Выпишите арифметические операции над матрицами.
4. Как происходит умножение матриц?
5. Приведите пример экономических приложений матриц.
6. Сколько строк и столбцов имеет матрица размера $m \times n$?
7. Какая из двух диагоналей квадратной матрицы называется главной?
8. Квадратная матрица $\lfloor a_{ij} \rfloor$ порядка n называется диагональной, если a_{ij} для всех:

а) $i < j$;
б) $i \neq j$;
в) $i > j$.

9. В каком случае для матриц A и B возможно вычислить:

а) сумму матриц $A + B$;
б) произведение AB?

10. Единичной называется матрица:

1) состоящая из всех единиц;
2) диагональная матрица, вдоль главной диагонали которой стоят 1;
3) определитель которой равен 0;
4) у которой на главной и побочной диагоналях стоят 1, остальные 0.

11. Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$. Установите соответствие между элементами $B = 2A + A^T$ и вариантами ответов:

а) $b_{11}=\ldots$	1. 9
б) $b_{12}=\ldots$	2. –9
в) $b_{21}=\ldots$	3. 3
г) $b_{22}=\ldots$	4. –3
	5. 6
	6. – 6

12. Умножением квадратных матриц одной размерности называется матрица, которая получена:

1) умножением соответствующих элементов матриц;
2) умножением соответствующих диагональных элементов;
3) умножением всех строк первой матрицы на столбцы второй как скалярное произведение векторов;
4) умножением всех столбцов первой матрицы на строки второй как скалярное произведение векторов.

13. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$. Сумма элементов третьего столбца матрицы $A\cdot B$ равна: … (написать ответ).

14. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 6\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$. Разность элементов второго столбца ($c_{12}-c_{22}$) матрицы $C=A\cdot B$ равна: … (написать ответ).

15. Даны матрицы $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 4 & 0\\ 6 & -7 & 5\end{pmatrix}$. и $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & 9\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$..

Сумма элементов побочной диагонали матрицы $B=2A-3C$ равна: … (написать ответ).

16. Дано: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$. Если матрица $C=A+B$ является диагональной, то матрица B может иметь вид:

а) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ -4 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ -4 & 1 & -2\\ -3 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ -2 & 1 & -4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}2 & -8 & -6\\ -4 & 2 & -8\\ -6 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

17. Матрицы A, B, C имеют одинаковую размерность. Если E – единичная матрица того же размера, что и матрицы A, B, C и матрица $C = 3A + +B - E$, тогда верно равенство …

а) $A=C - B + E$;
б) $E = C - 3A - B$;
в) $C - E = 3A + B$;
г) $B = C - 3A + E$.

18. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 3 & -4\\ -8 & 7\end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A - 2B$ равна:

а) $\begin{pmatrix}1 & -8\\ -4 & 5\\ 12 & -8\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 7\\ 5 & -7\\ -12 & 13\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1 & 8\\ 4 & 5\\ 12 & 8\end{pmatrix}$.

19. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -7 & 5 & -2\end{pmatrix}$. Тогда матрица $C=2A+B$ равна …

а) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4 & 7 & 7\\ 15 & 9 & 8\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}4 & 7 & 7\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 11 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

20. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & 1 & -2\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\ 8 & 1 & 2\\ 7 & -4 & -9\end{pmatrix}$. Тогда решением уравнения $A + 2X = B$ является матрица X, равная:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 0 & 2\\ 2 & -4 & -5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 12 & 0 & 4\\ 4 & -8 & -10\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & -4 & -5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 4 & -8 & -10\end{pmatrix}$.

21. Если существует матрица $A+A^T$, то матрица A:

1) может быть произвольной;
2) является нулевой (размера $m\times n$, где $m\neq n$);
3) является квадратной;
4) может быть единичной.

22. Операция произведения матриц правильно определена для матричного умножения вида:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -5 & 6 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 9 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -5 & 6 & 0\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}$.

3. Определители матриц

***Определение* 3.1.** Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число, которое считается по заданному правилу и называется определителем матрицы.

Порядком определителя называется порядок матрицы, для которой рассматривается данный определитель.

Определитель матрицы обозначается символами:

$$|A| = \det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Определение* 3.2.** Если определитель матрицы A равен нулю, то она называется вырожденной, если не равен нулю, то невырожденной.

Если квадратная матрица является вырожденной, то ее строки или столбцы линейно-зависимы.

3.1. Определители второго порядка

Если дана квадратная матрица второго порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

то ее определителем называется число:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12},$$

т.е. определитель матрицы второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали.

***Пример* 3.1.** Найти определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 3 + 4 = 7.$$

$|A| = 7 \neq 0$ означает, что заданная матрица невырожденная.

3.2. Определители третьего порядка

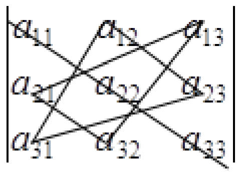
Если дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

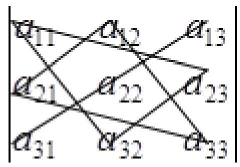
то ее определитель можно найти по нескольким правилам.

Правило «звездочка»:

главная диагональ (+):



побочная диагональ (–):



$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

***Пример* 3.2.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 1 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Другие способы вычисления определителей третьего порядка рассмотрим в пункте вычисление определителей высших порядков.

3.3. Определители высших порядков

Рассмотрим определитель порядка n:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Прежде чем перейти к правилам вычисления определителей высших порядков введем понятия минора и алгебраического дополнения матрицы A.

***Определение* 3.3.** Минором M_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, полученный вычеркиванием в этой матрице i-й строки и j-го столбца. Порядок минора на одну единицу меньше порядка матрицы.

***Определение* 3.4.** Алгебраическим дополнением A_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Если матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то, например, ее минор M_{21} находится следующим образом (вычеркиваем вторую строку и первый столбец):

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а алгебраическое дополнение A_{21} вычисляется по формуле:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-1\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Теорема* 3.1.** Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Выпишем разложение определителя порядка n:

а) по i-й строке:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot M_{i1}+a_{i2}\cdot(-1)^{i+2}\cdot M_{i2}+\dots+$$

$$+a_{in}\cdot(-1)^{i+n}\cdot M_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot M_{ij};$$

б) по j-му столбцу:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot M_{j1}+a_{2j}\cdot(-1)^{2+j}\cdot M_{2j}+\dots+a_{nj}\cdot(-1)^{n+j}\cdot M_{nj}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Это правило называется разложением определителя по строке или по столбцу.

При разложении определителя по строке или столбцу целесообразно использовать строку или столбец, содержащие наибольшее количество нулей (тогда число слагаемых сократится). Если таких строки или столбца нет, то нули в одном ряду можно получить, упростив определитель, используя его свойства.

3.4. Свойства определителей

1) При транспонировании матрицы значение определителя не изменится:
$$|A| = \left|A^T\right|.$$

2) Если определитель содержит полностью нулевую строку или столбец, то его значение равно нулю (доказательство очевидно, если использовать разложение по этой строке или столбцу):
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{i+1}\cdot M_{i1} + 0\cdot(-1)^{i+2}\cdot M_{i2} + \dots + 0\cdot(-1)^{i+n}\cdot M_{in} = 0;$$

3) Значение определителя не изменится, если к одной из его строк (столбцов) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{i1} & a_{12}+\lambda a_{i2} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{in} \\ a_{21}+\mu a_{i1} & a_{22}+\mu a_{i2} & \dots & a_{2n}+\mu a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4) Если определитель содержит две одинаковые строки (столбцы), то его значение равно нулю:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+(-1)\cdot a_{11} & a_{12}+(-1)\cdot a_{12} & \dots & a_{1n}+(-1)\cdot a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

5) Если определитель содержит две линейно-зависимых строки (столбца), то его значение равно нулю.

6) Если строка (столбец) определителя содержит общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7) Если строка (столбец) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то его можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8) Определитель матрицы поменяет знак на противоположный при перестановке двух строк (столбцов) местами.

***Пример* 3.3.** Упростить и вычислить определитель 4-го порядка. Главной целью упрощения определителей является получение наибольшего числа нулей в одной строке (столбце). Для начала выбирается рабочая строка (столбец), которая будет умножаться на заданное число и прибавляться к другим строкам (столбцам) так, чтобы в одном столбце (строке) получались нули:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

В качестве рабочей строки возьмем первую строку, так как она содержит удобный при упрощении элемент: единицу. С помощью этой единицы мы получим нули в первом столбце 2-й, 3-й и 4-й строк, умножив первую строку на соответствующие числа, взятые с противоположным знаком, т.е. на –3, 1 и 2. Таким образом, мы выполним следующие действия:

первая строка как рабочая останется неизменной;

ко второй строке прибавим первую, умноженную на –3;

к третьей строке прибавим первую, умноженную на 1, то есть просто сложим первую и третью строки;

к четвертой строке прибавим первую, умноженную на 2:

В определителе изменятся 2-я, 3-я и 4-я строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3+1\cdot(-3) & 2+(-2)\cdot(-3) & 4+3\cdot(-3) & 6+(-4)\cdot(-3) \\ -1+1 & 5+(-2) & 8+3 & 2+(-4) \\ -2+1\cdot 2 & 3+(-2)\cdot 2 & 7+3\cdot 2 & 2+(-4)\cdot 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 18 \\ 0 & 3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} =$$

после проведенного упрощения мы разложим определитель по первому столбцу:

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 & 18 \\ 3 & 11 & -2 \\ -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 18 \\ 3 & 11 & -2 \\ -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} =$$

Вместо четырех слагаемых мы имеем только одно, потому что 2-й, 3-й и 4-й элементы первого столбца равны нулю, следовательно, эти разложения не имеет смысла выписывать. Теперь нам нужно вычислить значения оставшегося минора. Его можно посчитать по правилу «звездочка» или тоже упростив. Пойдем вторым путем. В качестве рабочего столбца возьмем первый столбец, так как там есть –1 и прибавим этот столбец ко второму и третьему, предварительно умножив его соответственно на 13 и –6:

$$= \begin{vmatrix} 8 & -5 & 18 \\ 3 & 11 & -2 \\ -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5+8\cdot 13 & 18+8\cdot(-6) \\ 3 & 11+3\cdot 13 & -2+8\cdot(-6) \\ -1 & 13+1\cdot 13 & -6+8\cdot(-6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 99 & -30 \\ 3 & 50 & -20 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Упрощенный определитель разложим по третьей строке:

$$= -1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 99 & -30 \\ 50 & -20 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 33 & -10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -30 \cdot (33 \cdot (-2) - 5 \cdot (-10)) =$$

$$= -30 \cdot (-66 + 50) = -30 \cdot (-16) = 480.$$

(чтобы облегчить вычисления из первой строки минора второго порядка вынесли в качестве общего множителя 3, а из второй строки –10).

Контрольные вопросы:

1. Что означают определители матриц?
2. Какими методами их можно вычислить?
3. Дайте понятие миноров и алгебраических дополнений матриц.
4. Что такое определители высших порядков и их вычисление с использованием свойств?
5. Приведите свойства определителей.
6. Для каких матриц введено понятие определителя?
7. Чему равен определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки или два одинаковых столбца?

8. Изменится ли определитель матрицы, если поменять местами первый и последний столбец матрицы (размерность матрицы больше единицы)?

9. Изменится ли определитель матрицы, если к каждой строке, кроме последней, прибавить последнюю строку матрицы?

10. Что означает невырожденная матрица?

11. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ равен:

1) 0;
2) $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$;
3) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;
4) $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$.

12. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ равен:

а) $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$; в) $4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; г) $2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

13. Минор M_{13} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ равен:

1) 21;
2) – 21;
3) – 42;
4) – 8.

14. Корень уравнения $\begin{vmatrix} 5 & x & 2 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ равен:

а) – 1;
б) 1;
в) – 5;
г) 3.

15. Матрица называется вырожденной, если:

1) все ее строки и столбцы линейно независимы;
2) вдоль главной диагонали стоят 0;
3) ее определитель отличен от 0;
4) ее определитель равен 0.

16. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ равен:

а) 83;
б) 89;
в) 91;
г) 97 .

17. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ равен:

1. 80;
2. – 40;
3. 40;
4. 20

18. Корень уравнения $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x$ равен:

а) –3;
б) 3;
в) 0;
г) 9.

19. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ равен:

а) 135;
б) –45;
в) 45;
г) –135.

20. Корень уравнения $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2x$ равен:

а) 5;
б) –1;
в) 1;
г) –5.

21. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $|A| + 2|B| =$:

1) 143;
2) – 143;

3)–197;

4) 305.

22. Если к некоторому столбцу/строке определителя прибавить другой столбец/строку, умноженный на произвольное число, то определитель:

1) умножится на это число;

2) станет = 0;

3) не изменится;

4) так делать нельзя.

23. Если в определителе матрицы поменять строки местами, то он:

1) не изменится;

2) поменяет знак;

3) изменит свое значение;

4) нельзя строки менять местами.

24. Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} -4 & 16 & 8-4x \\ 1 & -4 & -2+x \\ 25 & -20 & 1+3y \end{pmatrix}$ равен … (написать правильный ответ).

4. Системы линейных алгебраических уравнений

4.1. Понятие систем линейных уравнений

Под системой, состоящей из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$, понимается совокупность равенств, имеющая вид:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Числа a_{ij} называются **коэффициентами** системы, числа b_i – элементами правых частей.

Систему (5.1) можно представить в векторно-матричной форме:

$$Ax = b, \tag{4.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица размерности $m \times n$, составленная из коэффициентов при неизвестных, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор правых частей или свободных членов.

***Определение* 4.1.** Решением системы (4.1) называется любой упорядоченный набор чисел $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, подстановка которых в уравнения системы (4.1) вместо $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ соответственно, превращает их в верные равенства (тождества).

***Определение* 4.2.** Система (4.1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной – если она решений не имеет.

Совместная система (4.1) может иметь только единственное решение или бесконечно множество решений.

Если система совместна, то каждое ее решение называется **частным***,* совокупность всех частных решений называется **общим решением** системы.

***Определение* 4.3.** Система называется неоднородной, если среди элементов ее правых частей есть хотя бы один отличный от нуля, иначе она называется однородной.

***Определение* 4.4.** Две системы уравнений называются эквивалентными (равносильными), если совпадают множества решений этих систем.

4.2. Методы решения системы линейных уравнений. Метод Крамера

***Теорема* 4.1.** Если определенная система $Ax = b$ такова, что A – квадратная невырожденная матрица, то существует единственное решение этой системы, каждая координата которого вычисляется по формулам:

$$\bar{x}_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = 1,2,...,n, \tag{4.3}$$

где $\Delta = |A| \neq 0$, Δ_j – определитель, полученный путем замены в определителе матрицы A j-го столбца столбцом свободных членов b.

***Пример* 4.1.** Найти решение системы методом Крамера.

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.$$

Выпишем все компоненты системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система состоит из трех уравнений и трех переменных, значит, является определенной. Проверим, является ли матрица невырожденной:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 27 + 4 + 20 - 15 - 24 - 6 = 6,$$

$\Delta = 6 \neq 0$, следовательно, матрица A – невырожденная, система имеет единственное решение.

Найдем определители Δ_j, $j = 1,2,3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 9 + 4 + 20 - 15 - 24 - 2 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 18 + 1 + 10 - 10 - 6 - 3 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 =$$

$= 9 + 8 + 4 - 3 - 8 - 12 = -2.$

Находим значения переменных по формуле (5.3):

$$\bar{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3},\ \bar{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3},\ \bar{x}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Чтобы убедиться в том, что решение $\bar{x} = \left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ найдено верно, сделаем проверку:

$$A\cdot\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 4\cdot\frac{5}{3} + 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 3\cdot\frac{5}{3} + 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\cdot\frac{5}{3} + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12+20-5}{3} \\ \frac{-8+15-1}{3} \\ \frac{-4+10-3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{6}{3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b, \quad \text{верно.}$$

Ответ: $\bar{x} = \left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

4.3. Решение произвольных систем: метод Гаусса (последовательных исключений неизвестных)

Универсальным методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса. Пусть дана произвольная система (4.1), т.е. система, в которой количество уравнений и неизвестных может быть любым.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Под элементарными подразумевают преобразования, приводящие к эквивалентной (равносильной) системе уравнений.

Введем несколько ключевых понятий, используемых в методе Гаусса:

Под расширенной матрицей системы понимается матрица A, дополненная столбцом свободных членов b:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (A|b).$$

Очевидно, что система линейных алгебраических уравнений задана, если известна матрица $\widetilde{A}$. По матрице $\widetilde{A}$ мы легко восстанавливаем систему, обозначения переменных системы при этом особой роли не играют. Уравнения в системе представляют строки расширенной матрицы коэффициентов. Поэтому, в частности, преобразования можно производить только над строками матрицы $\widetilde{A}$.

Элементарные преобразования строк матрицы:

1) перемена строк местами;
2) умножение (деление) строки на число, отличное от нуля;
3) прибавление к любой строке матрице любой другой строки, умноженную на отличное от нуля число.

Матрица A называется **трапециевидной,** если в ней $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

Трапециевидная матрица A называется **ступенчатой**, если в ней есть диагональные элементы $a_{ii} = 0$.

Наивысший порядок отличного от нуля минора прямоугольной матрицы A называется **рангом матрицы** и обозначается символом $r(A) = rank(A)$.

Ранг матрицы $r(A) = rank(A)$ равен максимальному число линейно-независимых строк (столбцов) матрицы, $1 \le r(A) \le \min(m; n)$.

Теорема Кронекера-Капелли. Произвольная система (5.1) является совместной тогда и только тогда, когда $r(A) = r(\widetilde{A})$.

Если $r(A) \ne r(\widetilde{A})$, то система (5.1) несовместна.

Вернемся к изложению метода Гаусса. В методе Гаусса можно выделить прямой и обратный ходы.

Прямой ход. Для системы (5.1) выписываем расширенную матрицу $\widetilde{A}$. На первом шаге с помощью элементарных преобразований **строк** обнуляем все элементы, кроме элемента, стоящего в первой строке, что соответствует исключению соответствующей этому столбцу переменной из всех уравнений, кроме первого. В дальнейшем первую строку матрицы не трогаем. На втором шаге выбираем другой столбец, в котором элемент второй строки отличен от нуля и обнуляем все элементы, начиная с третьей строки, что соответствует исключению соответствующей этому столбцу переменной из всех уравнений, начиная с третьего, и т.д.

Если, в частности, преобразования последовательно производятся над первым, вторым и т.д. столбцами, то матрица $\widetilde{A}$ будет приведена к трапециевидному или ступенчатому или треугольному виду.

По теореме Кронекера-Капелли устанавливаем совместность системы (4.1). Если системы (4.1) несовместна, то делаем вывод об отсутствии решения. Если система (4.1) совместна, то начинаем восстанавливать решение, этот процесс называют иногда **обратным ходом** метода Гаусса.

Обратный ход (для совместной системы). По полученной в результате преобразования матрице записываем систему, эквивалентную исходной. Наименьшее число переменных содержится в последнем уравнении системы.

Двигаясь последовательно от последнего к первому уравнению, находим ее решение.

Возможны две ситуации. Пусть $r(A) = r(\widetilde{A}) = p$. Тогда, если:

1) $p = n = m$, т.е. система (4.1) является определенной и имеет единственное решение;

2) или $p < n$, то система (4.1) является неопределенной и имеет бесконечное множество решений, в ней $n - p$ переменных являются свободными, могут принимать любые действительные значения, остальные (базисные переменные) выражаются через свободные.

***Пример* 4.2.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1,\\
&x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5,\\
&-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -3,\\
&2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3.
\end{aligned}$$

Число переменных равно числу уравнений равно 4, следовательно, система является определенной. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right).$$

Приведение к треугольному виду: сначала выберем рабочую строку, с помощью которой будем получать нули в одном из столбцов матрицы. Удобнее всего взять строку с 1, т.е. вторую строку, которую поменяем местами с первой строкой:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim$$

С помощью 1 получим нули в первом столбце, выполнив следующие действия:

– первую строку умножим на (–5) и прибавим ко второй строке;

– первую строку умножим на 3 и прибавим к третьей строке;

– первую строку умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 13 & -22 & -17 & -24 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 10 & -11 & -10 & -13 \end{array}\right) \sim$$

– третью строку поменяем местами со второй и с помощью (–1) получим нули во втором столбце вместо 13 и 10, для этого новую вторую строку умножим:

– на 13 и прибавим к третьей строке;

– на 10 и прибавим к четвертой строке:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 13 & -22 & -17 & -24 \\ 0 & 10 & -11 & -10 & -13 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 160 & 87 & 132 \\ 0 & 0 & 129 & 70 & 107 \end{array}\right)\sim$$

Теперь возникла сложная ситуация, когда ни в третьей, ни в четвертой строке нет 1 или –1. Тогда, чтобы в четвертой строке получить ноль, сделаем следующее: третью строку умножим на (–129), а четвертую на 160, и затем складываем эти строки, результат запишем в четвертую строку, а третью оставим в первоначальном виде:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -20640 & -11223 & -17028 \\ 0 & 0 & -20640 & 11200 & 17120 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 160 & 87 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & -23 & 92 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы привели матрицу к треугольному виду. В преобразованной расширенной матрице нет нулевых строк, значит, ранг матрицы A $r(A)=4$, и равен рангу расширенной матрицы $\widetilde{A}$, т.е. $r(A)=r(\widetilde{A})=4$, т.е. система совместна. Так как исходная система определенная, а ранг равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Найдем его, применив обратный ход метода Гаусса. Сначала восстановим систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} x_1-2x_2+4x_3+3x_4=5, & x_1-2x_2+4x_3+3x_4=5, \\ 0x_1-1x_2+14x_3+8x_4=12, & -x_2+14x_3+8x_4=12, \\ 0x_1+0x_2+160x_3+87x_4=132, & 160x_3+87x_4=132, \\ 0x_1+0x_2+0x_3-23x_4=92. & -23x_4=92. \end{array}$$

Из последнего уравнения найдем значение x_4 и подставим его в третье уравнение:

$$-23x_4=92\Rightarrow \bar{x}_4=\frac{92}{-23}=-4,$$

$$160x_3+87\cdot(-4)=132,\Rightarrow 160x_3-348=132,\Rightarrow 160x_3=132+348=480,$$

$$\Rightarrow \bar{x}_3=\frac{480}{160}=3,$$

$$-x_2+14\cdot 3+8\cdot(-4)=12,\Rightarrow -x_2+42-32=-x_2+10=12,\Rightarrow \bar{x}_2=-2,$$

$$x_1-2\cdot(-2)+4\cdot 3+3\cdot(-4)=5,\Rightarrow x_1+4+12-12=x_1+4=5,\Rightarrow \bar{x}_1=5-4=1.$$

Решение системы: $\bar{x}=(1;-2;3;-4)$. Сделаем проверку:

$$A\overline{x}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 4 & 3\\ -3 & 5 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-6-6+8\\ 1+4+12-12\\ -3-10+6+4\\ 2-12-9+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ -3\\ -3\end{pmatrix}\text{, верно.}$$

Ответ: $\overline{x}=(1;-2;3;-4)$.

***Пример* 4.3.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned}&2x_1-x_2+3x_3+4x_4=-1,\\ &x_1+2x_2-3x_3+x_4=2,\\ &5x_1-5x_2+12x_3+11x_4=-5,\\ &x_1-3x_2+6x_3+3x_4=-3.\end{aligned}$$

Число переменных равно числу уравнений равно 4, следовательно, система является определенной. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -5 & 12 & 11 & -5\\ 1 & -6 & 6 & 3 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1\\ 5 & -5 & 12 & 11 & -5\\ 1 & -6 & 6 & 3 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 9 & 2 & -5\\ 0 & -15 & 27 & 6 & -15\\ 0 & -5 & 9 & 2 & -5\end{array}\right)\sim$$

Третью строку сократим на общий множитель 3 и вычтем из нее вторую строку, из четвертой строки вычтем вторую строку:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 9 & 2 & -5\\ 0 & -5 & 9 & 2 & -5\\ 0 & -5 & 9 & 2 & -5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 9 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 9 & 2 & -5\end{array}\right).$$

В итоге, после приведения к треугольному виду в расширенной матрице осталось 2 строки, следовательно, $r(A)=r(\widetilde{A})=2$, т.е. система совместна. Ранг меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений. $p=2$, $n-p=4-2-2$. Значит, в преобразованной системе будут две базисных и две свободных переменных. Пусть базисными будут x_1 и x_2, а свободными x_3 и x_4. Найдем решение, применив обратный ход метода Гаусса. Сначала восстановим систему уравнений:

$$\begin{aligned}&x_1+2x_2-3x_3+x_4=2,\\ &0x_1-5x_2+9x_3+2x_4=-5,\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}x_1+2x_2-3x_3+x_4&=2,\\ -5x_2+9x_3+2x_4&=-5,\end{aligned}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&x_1+2x_2=3x_3-x_4+2,\\ &-5x_2=-9x_3-2x_4-5,\end{aligned}$$

Пусть $x_3=c_1$ и $x_4=c_2$.

$$x_1 + 2x_2 = 3c_1 - c_2 + 2,$$
$$-5x_2 = -9c_1 - 2c_2 - 5, \Rightarrow$$
$$x_2 = \frac{-9c_1 - 2c_2 - 5}{-5} = \frac{9}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + 1,$$
$$x_1 + 2\cdot\left(\frac{9}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + 1\right) = 3c_1 - c_2 + 2, \Rightarrow$$
$$\bar{x}_2 = \frac{9}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + 1,$$
$$x_1 + \frac{18}{5}c_1 + \frac{4}{5}c_2 + 2 = 3c_1 - c_2 + 2, \Rightarrow x_1 = -\frac{18}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 - 2 + 3c_1 - c_2 + 2, \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{-18+15}{5}c_1 + \frac{-4-5}{5}c_2 = \frac{-3}{5}c_1 - \frac{9}{5}c_2,$$
$$\bar{x}_1 = -\frac{3}{5}c_1 - \frac{9}{5}c_2.$$

Общее решение системы примет вид:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}c_1 - \frac{9}{5}c_2 \\ \frac{9}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Константы c_1, c_2 принимают произвольные значения. Если им задать конкретные числовые значения, то можно найти частное решение:

$$\bar{x}_{\text{частное}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\cdot 5 - \frac{9}{5}\cdot 10 \\ \frac{9}{5}\cdot 5 + \frac{2}{5}\cdot 10 + 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-18 \\ 9+4+1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

***Пример* 4.4.** Найти решение системы уравнений:

$$4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 + x_5 = 2,$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 = 3,$$
$$2x_1 - 16x_2 + 19x_3 - 15x_4 + 20x_5 = 7.$$

Число переменных больше числа уравнений (5>3), следовательно, система является неопределенной. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}4&-2&5&-6&1&2\\2&4&-3&1&-6&3\\2&-16&19&-15&20&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&4&-3&1&-6&3\\4&-2&5&-6&1&2\\2&-16&19&-15&20&7\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&4&-3&1&-6&3\\0&-10&11&-8&13&-4\\0&-20&22&-16&26&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&4&-3&1&-6&3\\0&-10&11&-8&13&-4\\0&-10&11&-8&13&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&4&-3&1&-6&3\\0&-10&11&-8&13&-4\\0&0&0&0&0&-6\end{array}\right).$$

В результате преобразований $r(A)=2, r(\widetilde{A})=3$, $r(A)\neq r(\widetilde{A})$, следовательно, система несовместна и решений не имеет.

Контрольные вопросы:

1. Запишите общий вид системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

2. В каком случае система линейных алгебраических уравнений является однородной?

3. Дайте определение решения системы линейных алгебраических уравнений.

4. Какую систему линейных алгебраических уравнений называют совместной (несовместной)?

5. Сколько решений может иметь система линейных алгебраических уравнений?

6. В каком случае система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение? Какие методы можно применить для нахождения решения такой системы?

7. Может ли однородная система линейных алгебраических уравнений быть несовместной?

8. Какой метод применим для решения системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов?

9. Что называют расширенной матрицей коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений. Перечислите эквивалентные преобразования, которые можно применять к расширенной матрице коэффициентов в методе Гаусса.

10. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

11. Дайте определение базисного решения системы линейных алгебраических уравнений.

12. Система

$$\begin{cases}4x-6y=5,\\ \lambda x+3y=4\end{cases}$$

не имеет решений, если λ равно:

а) –2;
б) 2;
в) 1;
г) 0.

13. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -4 & 16 & -8 \\ 3 & -12 & 6 \end{pmatrix}$ равен: … (написать ответ).

14. Система $Ax = b$ называется совместной, если:

1) она имеет бесконечное множество решений;
2) не имеет решений;
3) имеет единственное решение;
4) $r(A) \neq r(\widetilde{A})$;

15. Система $Ax = b$, где $A - (n \times n)$ матрица, $x - (n \times 1)$ и $b - (n \times 1)$ векторы, называется:

1) недоопределенной;
2) совместной;
3) переопределенной;
4) определенной.

16. Базисное решение

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 4x - 5y - z = -7 \end{cases}$$

может иметь вид:

а) (–3; –2; 0),
б) (3; 2; 0);
в) (–2; –3; 0);
г) (2; 3; 0).

17. Рангом матрицы A называется:

1) максимальное число строк или столбцов матрицы;
2) максимальный порядок ненулевого минора;
3) максимальное число линейно-независимых строк или столбцов матрицы;
4) максимальный элемент матрицы.

18. Расширенной матрицей системы $Ax = b$ называется:

1) матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных;
2) матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, в которой столбец j заменен столбцом b;
3) составленная из коэффициентов при неизвестных и столбца b;
4) любая прямоугольная матрица.

19. Система

$$\begin{cases} x + 2y + \lambda z = 3, \\ 4x + 5y + z = 6, \\ 7x + 8y + \lambda z = 9 \end{cases}$$

совместна, если λ равно:

а) –1;
б) 2;
в) –2;
г) 1.

20. Метод Крамера для решения системы $Ax = b$ используется, если:

1) A – любая квадратная матрица порядка n;
2) A – вырожденная матрица;
3) A – невырожденная матрица;
4) A – диагональная матрица.

21. Система

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0, \\ 6x + 3y + 9z = 12, \end{cases}$$

будет:

а) несовместной и определенной;
б) совместной и определенной;
в) несовместной и неопределенной;
г) совместной и неопределенной.

22. Ранг матрицы A всегда:

1) меньше значения базисного минора;
2) $1 \le r(A) \le \min(m, n)$;
3) $\min(m, n) \le r(A) \le \max(m, n)$;
4) $\min(a_{ij}) \le r(A) \le \max(a_{ij}), \quad i, j = 1, ..., n$.

23. Система $Ax = b$ имеет бесконечное множество решений, если:

1) $r(A) = r(\widetilde{A})$ равен числу переменных;
2) $r(A) = r(\widetilde{A})$ меньше числа переменных;
3) она несовместна;
4) A – невырожденная квадратная матрица.

24. При решении системы линейных уравнений методом Крамера всегда получается:

1) пустое множество решений;
2) число решений, совпадающее с количеством переменных;
3) единственное решение;
4) множество решений.

25. Указать матрицы, ранг которых совпадает с порядком матрицы:

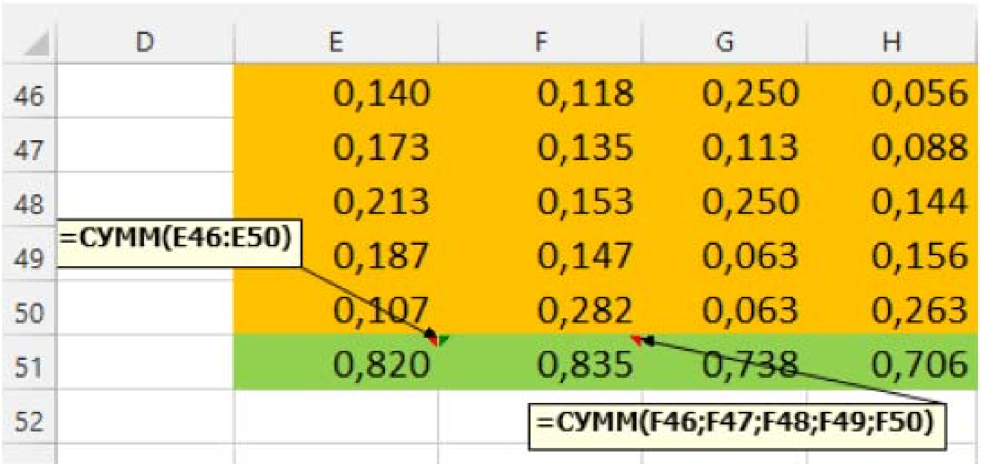
а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $D = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Экономико-математические модели

Рассмотрим применение методов линейной алгебры к решению экономических задач с использованием функций MS Excel. Нам понадобятся следующие функции[1]:

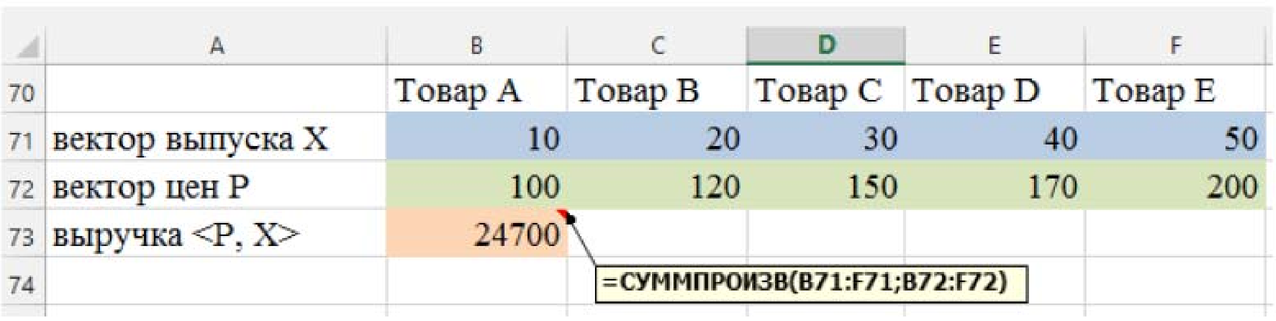
1) Автосумма – функция =СУММ(массив) или =СУММ (число1, [число2],...) вычисляет сумму всех чисел, указанных в качестве аргументов. Каждый аргумент может быть диапазоном, ссылкой на ячейку, массивом, константой, формулой или результатом другой функции. Например, функция СУММ(A1:A5) вычисляет сумму всех чисел в ячейках от A1 до A5. Другой пример: функция СУММ(A1, A3, A5) вычисляет сумму чисел в ячейках A1, A3 и A5 (рис. 5.1).



	D	E	F	G	H
46		0,140	0,118	0,250	0,056
47		0,173	0,135	0,113	0,088
48		0,213	0,153	0,250	0,144
49	=СУММ(E46:E50)	0,187	0,147	0,063	0,156
50		0,107	0,282	0,063	0,263
51		0,820	0,835	0,738	0,706
52			=СУММ(F46;F47;F48;F49;F50)		

Рис. 5.1. Использование функции автосумма

2) Сумма произведений – функция =СУММПРОИЗВ(массив1, [массив2], [массив3],...) перемножает соответствующие элементы заданных массивов и возвращает сумму произведений. Для двух массивов является аналогом скалярного произведения (рис. 5.2).



	A	B	C	D	E	F
70		Товар A	Товар B	Товар C	Товар D	Товар E
71	вектор выпуска X	10	20	30	40	50
72	вектор цен P	100	120	150	170	200
73	выручка <P, X>	24700				
74			=СУММПРОИЗВ(B71:F71;B72:F72)			

Рис. 5.2. Использование функции СУММПРОИЗВ для вычисления выручки

[1] Все описания функций взяты из справочного материала MS Excel.

3) Сумма квадратов – функция =СУММКВ(число1; [число2]; …) возвращает сумму квадратов аргументов. Корень – функция =КОРЕНЬ(число) возвращает положительное значение квадратного корня. Объединение этих двух функций в векторной алгебре позволяет вычислить длину вектора: =КОРЕНЬ(СУММКВ(число1; [число2]; …)) (рис. 5.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
75								
76	вектор a	1	3	0	-7	4	0	5
77	|a|	10	=КОРЕНЬ(СУММКВ(B76:H76))					
78								

Рис. 5.3. Вычисление длины вектора с помощью комбинации функций =КОРЕНЬ(число) и =СУММКВ(число1; [число2]; …).

4) Сумма квадратов разностей – функция =СУММКВРАЗН(массив1;массив2) возвращает сумму квадратов разностей соответствующих значений в двух массивах. Комбинация двух функций =КОРЕНЬ(СУММКВРАЗН(массив1; массив2)) позволяет вычислить расстояние между двумя векторами (рис. 5.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
79								
80	вектор a	1	3	2	-6	4	0	5
81	вектор b	4	-1	1	2	7	9	1
82	|a - b|	14						
83			=КОРЕНЬ(СУММКВРАЗН(B80:H80;B81:H81))					

Рис. 5.4. Вычисление расстояния между векторами
с помощью комбинации функций
=КОРЕНЬ(число) и =СУММКВРАЗН(массив1; массив2)

5) Определитель матрицы – =МОПРЕД(массив) – функция, вычисляющая определитель квадратной матрицы (рис. 5.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
87								
88	Определитель матрицы			4	12	3	7	
89				0	9	5	-6	
90				-9	-15	8	3	
91				-8	6	10	-11	
92					=МОПРЕД(D88:G91)			7335
93								

Рис. 5.5. Вычисление определителя матрицы

6) =ТРАНСП(массив) – функция, выполняющая транспонирование матрицы размером (m x k). Результатом вычисления на первом шаге будет одно число. Чтобы получить итоговую транспонированную матрицу, нужно от этого числа выделить массив размером (k x m), нажать F2, затем последовательно, не отпуская клавиш, нажать Ctrl Shift Enter. И в выделенном массиве появится результат транспонирования матрицы (рис. 5.6). Так же операцию транспонирования можно выполнить с помощью специальной вставки – транспонировать (рис. 5.7).

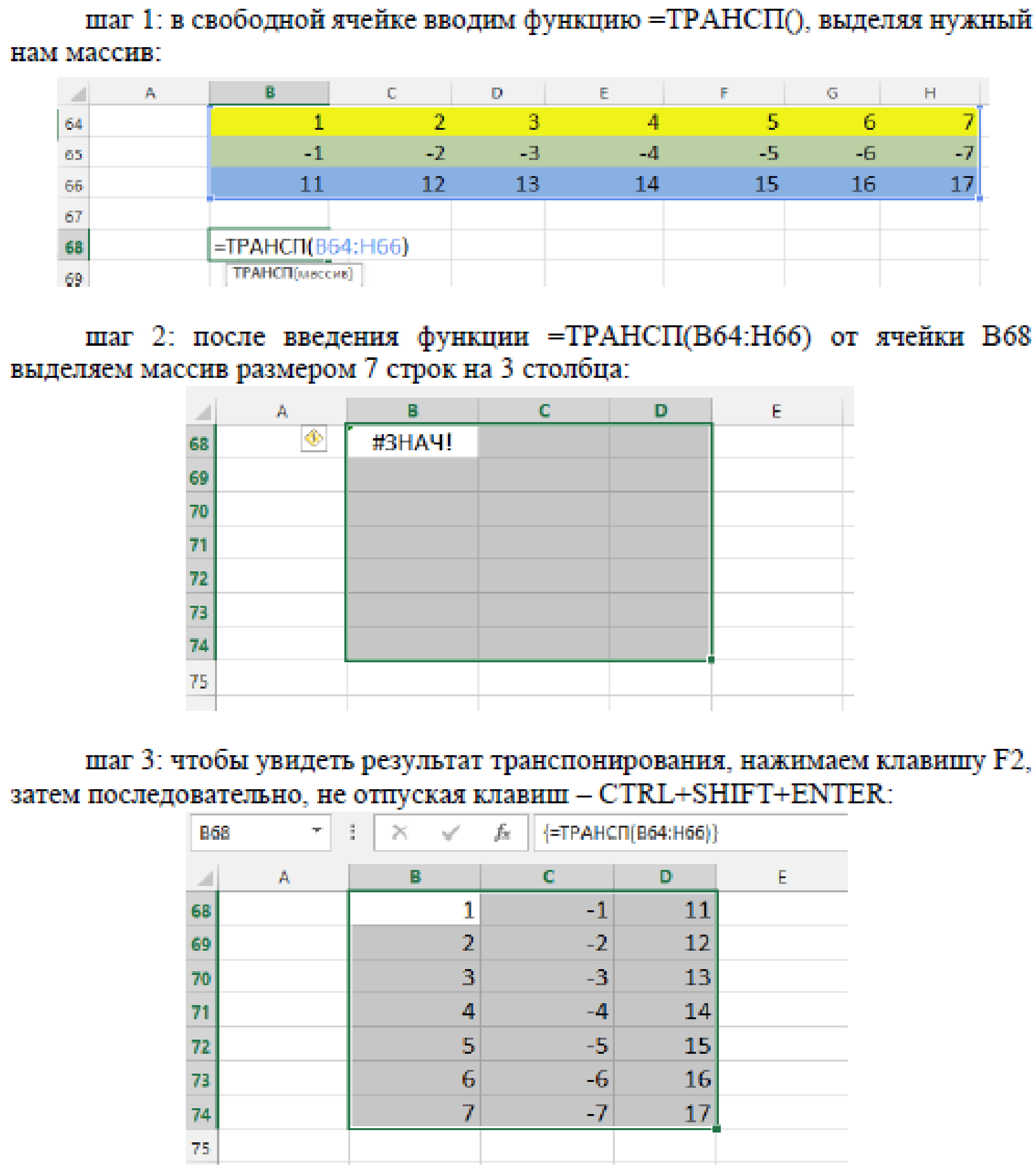


Рис. 5.6. Пошаговое использование функции ТРАНСП(массив)

шаг 1: вводим функцию =МУМНОЖ(массив1; массив2), в которой массивом 1 являются элементы матрицы А, массивом 2 – элементы матрица В:

	A	B	C	D	E	F
75						
76	A=	1	3	5	7	9
77	(3x5)	-2	-4	-6	-8	-10
78		0	13	15	11	17
79						
80	B=	1,2	2,3	3,4	4,5	
81	(5x4)	5,6	6,7	7,8	8,9	
82		-2,1	-3,2	-4,3	-5,4	
83		-6,5	-7,6	-8,7	-9,8	
84		0,2	0,4	0,6	0,8	
85						
86	AB=	=МУМНОЖ(B76:F78;B80:E84)				
87	(3x4)					

шаг 2: начиная с ячейки В86 выделяем массив размером 3 строки (количество строк матрицы А) на 4 столбца (количество столбцов матрицы В):

	A	B	C	D	E
86	AB=	-36,2			
87	(3x4)				
88					

шаг 3: чтобы увидеть результат нахождения произведения матриц А и В, нажимаем клавишу F2, затем последовательно, не отпуская клавиш – CTRL+SHIFT+ENTER:

B86 {=МУМНОЖ(B76:F78;B80:E84)}

	A	B	C	D	E
86	AB=	-36,2	-43,2	-50,2	-57,2
87	(3x4)	37,8	44,6	51,4	58,2
88		-26,8	-37,7	-48,6	-59,5

Рис. 5.8. Пошаговое описание умножения матриц

101		3	-3	13
102		4	-4	14
103		5	-5	15
104		6	-6	16

Рис. 5.7. Пошаговое описание транспонирование
с помощью меню «Специальная вставка»

7) =МУНОЖ(массив1;массив2) – функция, вычисляющая произведение двух матриц размерностей (m x n) и (n x k). Чтобы перемножить две матрицы, нужно ввести их в MS Excel, записав каждый элемент матрицы в отдельную ячейку так, чтобы получилось две таблицы размером (m x n) и (n x k). Затем в свободной ячейке с новой строки вводим функций =МУНОЖ (массив1; массив2), где массивом1 является первая таблица (m x n), а массивом2 – вторая таблица (n x k). Результатом вычисления на первом шаге будет одно число. Чтобы получить итоговую матрицу, нужно от этого числа выделить массив размером (m x k), нажать F2, затем последовательно, не отпуская клавиш, нажать Ctrl Shift Enter. И в выделенном массиве появится результат произведения двух матриц.

Рассмотрим на примерах решение экономических задач с помощью функций MS Excel.

***Пример 5.1.* Анализ прибыли и затрат**

Фирма выпускает 5 видов продукции A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 из четырех видов сырья R_1, R_2, R_3, R_4, удельные затраты одной единицы сырья на одну единицу изделия приведены в таблице (матрица А):

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
R_1	8	0	7	19	9
R_2	0	6	15	0	3
R_3	12	5	0	17	2
R_4	0	4	11	1	0

Планируемый выпуск продукции составляет X = (10, 20, 30, 40, 50) ед. соответственно.

Стоимость одной единицы сырья С = (60, 70, 80, 90) руб. соответственно.

Предполагаемая цена продажи одной единицы продукции Р = (2000, 1500, 3000, 3200, 1300) руб. соответственно.

1) Найти: а) количество сырья, необходимого для производства планируемого количества продукции (AX^T);

б) суммарные затраты на приобретение ресурсов (СА, затем $(CA)X^T$);

в) суммарную прибыль от продажи продукции в заданных условиях (Р – (СА), затем $(P-(CA))X^T$).

2) Как изменится планируемая прибыль, если:

а) приобрести ресурсы у другого поставщика по цене C_1 = (70, 62, 75, 95);

б) изменится план выпуска X_1 = (15, 15, 35, 35, 50) ед. при первоначальной стоимости ресурсов.

Решение. Введем данные в MS Excel (рис. 5.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	X	10	20	30	40	50		A	8	0	7	19	9
2	X1	15	15	35	35	50			0	6	15	0	3
3									12	5	0	17	2
4	C	60	70	80	90				0	4	11	1	0
5	C1	70	62	75	95								
6													
7	P	2000	1500	3000	3200	1300							

Рис. 5.9. Внесение исходных данных задачи в MS Excel

1а. Найдем количество сырья, необходимое для производства планируемого количества продукции AX^T=МУМНОЖ(I1:M4;ТРАНСП(B1:F1)), затем начиная от ячейки, в которой вводилась функция, выделяем массив размерностью 4 строки (количество строк матрицы А) на 1 столбец (вектор X после транспонирования будет состоять из одного столбца), нажимаем F2 и Ctrl Shift Enter. В результате получится матрица, отражающая какое количество сырья каждого вида необходимо затратить на выпуск 5 видов продукции (рис. 5.10).

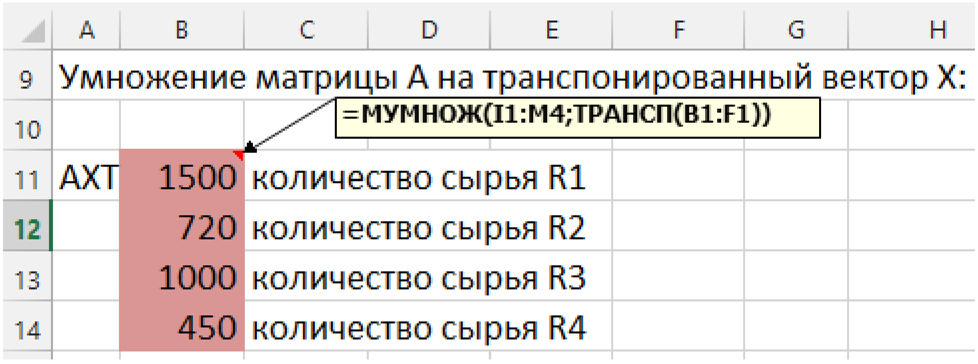


Рис. 5.10. Вычисление матрицы AX^T

1б. Вычислим суммарные затраты на приобретение ресурсов, сначала посчитав затраты на приобретение ресурсов на 1 единицу продукции: CA=МУМНОЖ(B4:E4;I1:M4); затем с учетом планируемого выпуска:

(CA)X^T= МУМНОЖ(J11:N11;ТРАНСП(B1:F1)) (рис. 5. 11).

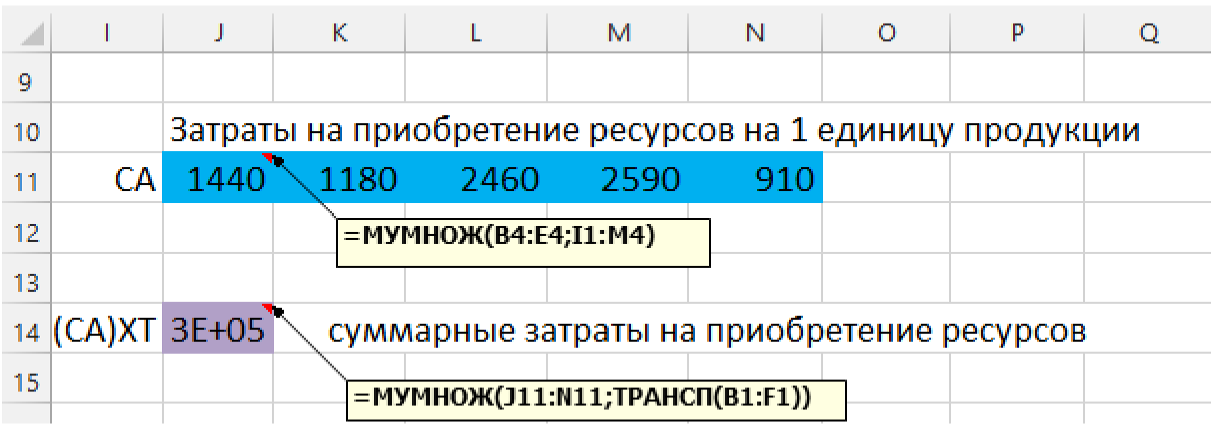


Рис. 5.11. Пошаговое вычисление суммарных затрат

1в. Найдем суммарную прибыль от продажи продукции в заданных условиях: P – (CA)= B7–J11 (вводим в первой ячейке, затем растягиваем за уголок ■ еще на 4 ячейки), затем вычисляем суммарную прибыль от продажи всей продукции:

(P – (CA))X^T=СУММПРОИЗВ(B17:F17;B1:F1) (рис. 5.12).

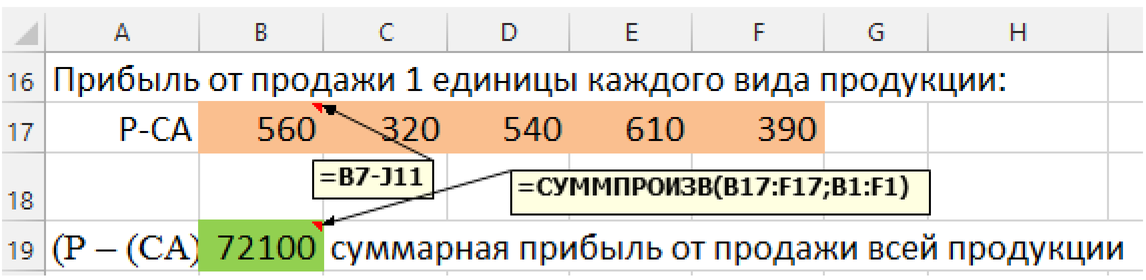


Рис. 5.12. Вычисление суммарной прибыли от продажи всей продукции

Анализ изменения планируемой прибыли, при изменении начальных условий

2а. Если приобрести ресурсы у другого поставщика по цене C_1 = (70; 62; 75; 95), то прибыль примет значение, представленное на рис. 5.13.

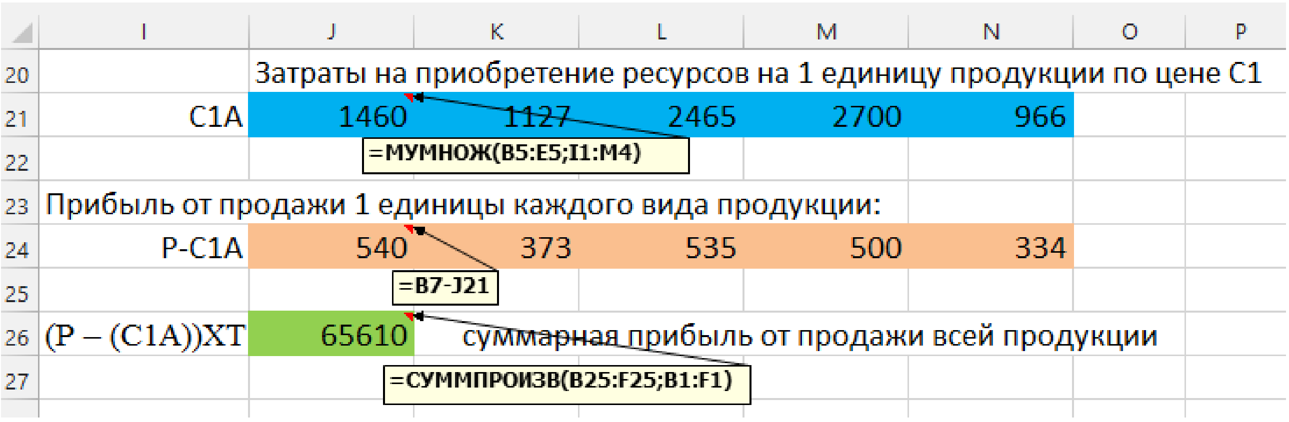


Рис. 5.13. Вычисление суммарной прибыли от продажи всей продукции при приобретении ресурсов у другого поставщика по цене C_1

Мы видим, что при закупке ресурсов у другого поставщика суммарная прибыль будет меньше на 6 490 руб. (72100 – 65610 = 6490), т.е. выгоднее работать с первым поставщиком сырья.

2б. Изменение прибыли при изменении плана выпуска X_1 = (15; 15; 35; 35; 50) ед. при первоначальной стоимости ресурсов представлено на рис. 5.14.

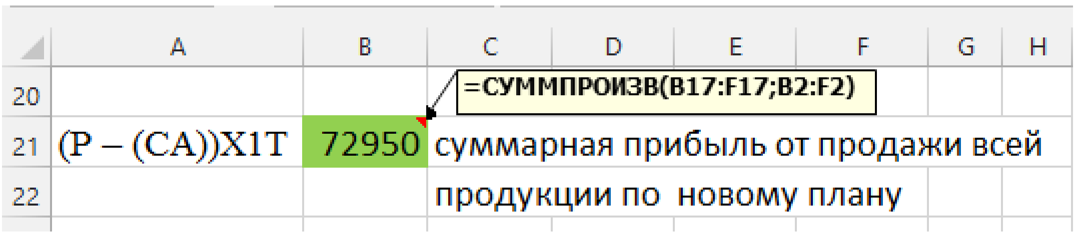


Рис. 5.14. Вычисление суммарной прибыли по новому плану выпуска.

Мы видим, что при изменении плана выпуска на X_1 суммарная прибыль будет больше на 850 руб. (72950 – 72100 = 850), т.е. выгоднее работать по новому плану выпуска продукции.

Пример 2. **Планирование производства.** Фирма выпускает 5 видов продукции A_1, A_2, …, A_5 из пяти видов сырья R_1, R_2,…, R_5. Расход сырья на 1 единицу продукции, а также запасы ресурсов приведены в таблице:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Запасы ресурсов
R_1	5	8	7	6	0	7320
R_2	16	9	11	0	2	9630
R_3	0	10	0	4	5	6430
R_4	15	0	18	8	13	18450
R_5	19	7	0	10	1	7760

1. Записать математическую модель задачи.

2. Найти количество продукции, которое можно произвести в заданных условиях.

3. Рассчитать суммарную выручку от продажи продукции, если цена за 1 единицу соответственно равна P = (140; 250; 180; 330; 410) руб.

Решение. 1. Запишем математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество продукции A₁, x_2 – количество продукции A₂, x_3 – количество продукции A₃, x_4 – количество продукции A₄, x_5 – количество продукции A₅.

Ограничение на ресурсы запишем в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 \qquad &= 7320\\
16x_1 + 9x_2 + 11x_3 + \qquad 2x_5 &= 9630\\
10x_2 + \qquad 4x_4 + 5x_5 &= 6430\\
15x_1 + \qquad 18x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 18450\\
19x_1 + 7x_2 + \qquad 10x_4 + x_5 &= 7760
\end{aligned}$$

Функция суммарной выручки примет вид:
$f(x) = 140x_1^* + 250x_2^* + 180x_3^* + 330x_4^* + 410x_5^*$, где x_i^* – решение системы уравнений, i = 1, …, 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
109	A	A1	A2	A3	A4	A5		запас
110	R1	5	8	7	6	0		7320
111	R2	16	9	11	0	2		9630
112	R3	0	10	0	4	5		6430
113	R4	15	0	18	8	13		18450
114	R5	19	7	0	10	1		7760
115					дельта	-347404	=МОПРЕД(B110:F114)	

Рис. 5.15. Представление данных задачи в MS Excel
и вычисление определителя матрицы A

2. Используя метод Крамера в MS Excel найдем решение системы. Для этого внесем все данные и воспользуемся функцией =МОПРЕД(массив) (рис. 5.15). Мы видим, что $\Delta = \det(A) = -347404 \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная, система уравнений имеет единственное решение.

Подготовим данные задачи для вычисления определителей $\Delta_1, \ldots, \Delta_5$, заменив в матрице A последовательно первый, второй, …, пятый столбцы столбцом правых частей b (запасы) (рис. 5.16).

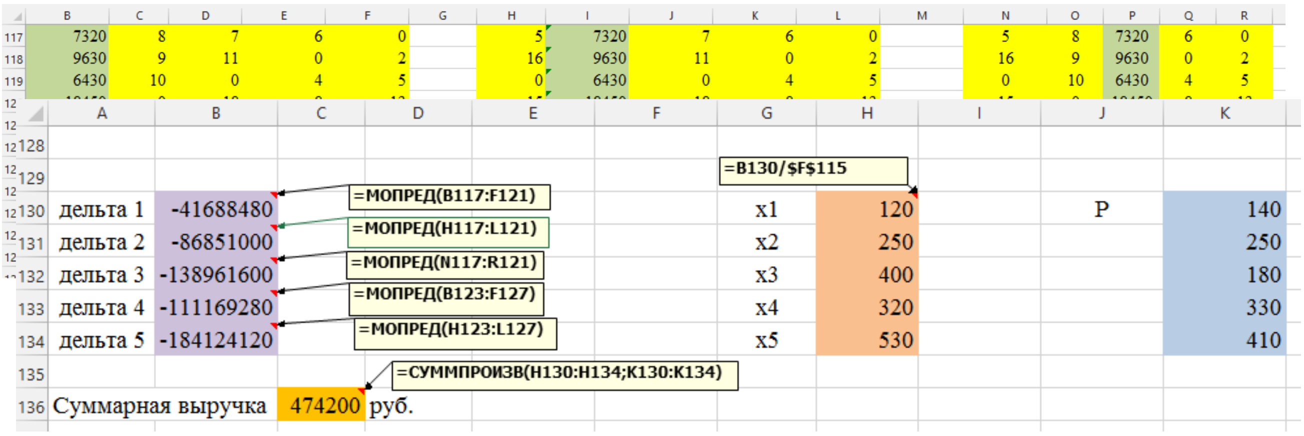


Рис. 5.17. Нахождение решения задачи

Вычислим определители $\Delta_1, \ldots, \Delta_5$, найдем значения переменных при $i = 1, \ldots, 5$ $x_i^* = \Delta_i / \Delta$ (рис. 5.17).

Ответ: план производства составит: (120; 250; 400; 320; 530) единиц продукции каждого вида, выручка будет равна 474200 руб.

6. Простые и сложные проценты

На финансовом рынке кредитор получает доход от предоставления денежных средств в долг в любой форме: выдачи ссуды, помещение денег под залог на депозит, покупка акций, облигаций и т.д. Получаемый доход определяется процентной ставкой.

Различают два вида процентных ставок: простые и сложные.

6.1. Простые проценты

Определение 6.1. Способ начисления, при котором ставка процента применяется к первоначальной сумме на протяжении всего срока долга, называется начислением при ставке простого процента. При начислении простых процентов доход за последовательные равные промежутки времени остается постоянным и равен определенной доле первоначальной суммы.

Пусть P – начальная сумма долга (размер кредита, вклада), i % – процентная ставка в единицу времени. Начисления в случае простых процентов за каждый период времени постоянны и равны $P \cdot i\%$.

Пусть S_n – наращенная сумма долга в каждом из периодов времени:

$S_0 = P, \quad S_1 = P + Pi = P(1+i), \quad S_2 = S_1 + Pi = P(1+i) + Pi = P(1+2i),$

$S_3 = S_2 + Pi = P(1+2i) + Pi = P(1+3i),$

$$S_n = S_{n-1} + Pi = P(1+(n-1)i) + Pi = P(1+ni), \qquad (6.1)$$

Формула (6.1) называется формулой простых процентов. Множитель $(1 + ni)$ – коэффициент роста или множитель наращивания. В общем случае, последовательность $\{S_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью Pi.

Пример 6.1. Предприниматель берет кредит на 5 лет в сумме 100 тысяч рублей под 40% годовых и обязуется вернуть долг, а также уплатить проценты за него в конце 5 года. Определить наращенную сумму по годам.

Решение: $S_o = 100$, $n = 5$, $i = 40\%$.

$S_0 = 100,$

$S_1 = 100 \cdot \left(1 + \frac{40}{100}\right) = 140,$

$S_2 = 100 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}4) = 180,$

$S_3 = 100 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}4) = 220,$

$S_4 = 100 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}4) = 260,$

$S_5 = 100 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}4) = 300.$

1. 140 тысяч рублей, 2. 180 тысяч рублей, 3. 220 тысяч рублей, 4. 260 тысяч рублей, 5. 300 тысяч рублей

В конце периода предпринимателю необходимо вернуть 300 тысяч рублей, из них 100 тысяч рублей – долг, 200 тысяч рублей наращенные проценты за кредит.

Суммы долга по годам является членами арифметической прогрессией с разностью 40 тысяч рублей

Начисление простых процентов в течение года. Рассмотрим случай, когда кредит предоставляется на определенный срок в пределах года. В качестве такого срока можно выбрать полугодие, квартал, месяц, неделю, несколько дней и даже сутки. Выделение подобных периодов означает, что год разбивается на заданное число временных интервалов, каждый из которых принят в расчетах за единицу. В расчетах исходят из годовой ставки процента за кредит, которая уменьшается пропорционально продолжительности выделенного периода. Год разбивается на m частей, а процент в счет кредита определяется как отношение: $\frac{i}{m}$. Период погашения кредита n выражается в указанных временных единицах

$$S_n = P\left(1 + \frac{i}{m}n\right).$$

Пример 6.2. Предприниматель берет кредит на 5 мес. в сумме 100 тысяч рублей под 18% годовых. Определить наращенную сумму за этот период.

Решение. $P = 100$ тысяч рублей, $i = \frac{18\%}{100} = 0{,}18$, $m = 12$ мес., $n = 5$ мес.

$S_5 = 100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}18}{12} \cdot 5\right) = 107{,}5$ тысяч рублей.

7,5 тысяч рублей – плата за кредит.

Дифференцированная система платежей. При составлении схемы выплаты кредита банки предлагают заемщику дифференцированную или аннуитетную схему платежей. Первая более простая в расчетах, рассмотрим ее подробно. Пусть заемщик берет кредит на *n* лет. Выплачивать он будет его ежемесячно по принципу: сумма долга, взятая в равных долях: $K = \frac{P}{12n}$ плюс начисленные проценты на текущую сумму долга за 1 месяц (потому что платежи идут ежемесячно). Так как срок кредита *n* лет, то всего платежей будет $12n$:

Первый платеж (через один месяц после получения кредита):

$S_1 = K + P \cdot \frac{i}{12}$ (так как банку еще ничего не возвращали, то проценты за 1 месяц начисляются на первоначальную сумму *P*).

Второй платеж:

$S_2 = K + (P - K) \cdot \frac{i}{12}$ (банку месяц назад вернули сумму *K*, поэтому сумма долга на второй месяц составляет $P - K$.

$$S_3 = K + (P - 2 \cdot K) \cdot \frac{i}{12}.$$

$$S_4 = K + (P - 3 \cdot K) \cdot \frac{i}{12}.$$

…

$$S_j = K + (P - (j-1) \cdot K) \cdot \frac{i}{12}.$$

…

$$S_{12n} = K + (P - (12n-1)\cdot K)\cdot \frac{i}{12} = K + K\cdot \frac{i}{12}.$$

Пример 6.3. Предприниматель берет кредит на 5 мес. в сумме 100 тысяч рублей под 18% годовых. Составить дифференцированную систему платежей.

Решение. $P = 100$ тысяч рублей, $i = \frac{18\%}{100} = 0{,}18$, $m = 12$ мес., $n = 5$ мес.

Найдем *K*. Так как срок кредита всего 5 месяцев, то *P* поделим на 5:

$K = \frac{100}{5} = 20$ тыс. руб. – ежемесячная сумма долга, которую предприниматель обязан погашать банку в течение пяти месяцев.

Теперь составим схему ежемесячных платежей с учетом процентов, начисляемых на остаточную сумму долга:

$S_1 = 20 + 100\cdot \frac{0{,}18}{12} = 20 + 100\cdot 0{,}015 = 21{,}5$ тыс. руб. – величина первого платежа.

$S_2 = 20 + (100-20)\cdot 0{,}015 = 21{,}2$ тыс. руб. – величина второго платежа.

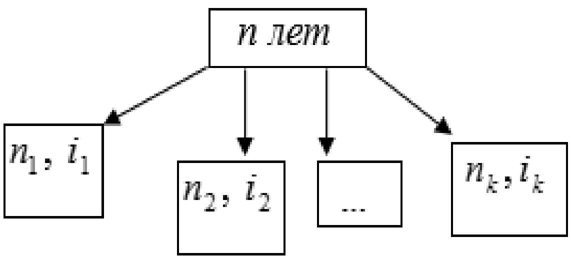
$S_3 = 20 + (100-40)\cdot 0{,}015 = 20{,}9$ тыс. руб. – величина третьего платежа.

$S_4 = 20 + (100-60)\cdot 0{,}015 = 20{,}6$ тыс. руб. – величина четвертого платежа.

$S_5 = 20 + (100-80)\cdot 0{,}015 = 20{,}3$ тыс. руб. – величина второго платежа.

Общая сумма долга составит: 21,5 + 21,2 + 20,9 + 20,6 + 20,3 = 104,5 тыс. руб., т.е. на 3 тыс. руб. меньше, если погашать кредит одним платежом в конце пятого месяца (пример 6.2).

Изменение простой процентной ставки в течение срока. Иногда в кредитных соглашениях предусматривают изменяющиеся во времени процентные ставки. Весь период времени n разбивается на несколько подпериодов, в каждом из которых действует своя процентная ставка (рис. 6.1).



при этом $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

Рис. 6.1. Изменяющаяся процентная ставка

При таком начислении простых процентов наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$S_n = P(1 + i_1 n_1 + i_2 n_2 + ... + i_k n_k)$.

Величину $(1 + i_1 n_1 + i_2 n_2 + ... + i_k n_k)$ называют множителем наращивания.

Пример 6.4. Контракт предусматривает следующий порядок начисления простых процентов: в первый год ставка 12%, в каждом последующем полугодии она возрастает на 0,5 процента. Необходимее найти наращенную сумму за 2,5 года, если первоначальная равна 300 тысяч рублей.

Решение. $P = 300$ тысяч рублей, $i_1 = \frac{12\%}{100} = 0{,}12$, $i_2 = \frac{12\% + 0{,}5\%}{100} = 0{,}125$, $i_3 = \frac{12{,}5\% + 0{,}5\%}{100} = 0{,}13$, $i_4 = \frac{13\% + 0{,}5\%}{100} = 0{,}135$, $n_1 = 1$ год, $n_2 = n_3 = n_4 = 0{,}5$ года, $n = 1 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2{,}5$ года.

$S_{2,5} = 300 \cdot \left(1 + 1 \cdot 0{,}12_1 + 0{,}5 \cdot 0{,}125 + 0{,}5 \cdot 0{,}13 + 0{,}5 \cdot 0{,}135\right) =$

$= 300 \cdot (1{,}12 + 0{,}5 \cdot 0{,}39) = 394{,}5$ тыс.руб.

6.2. Сложные проценты

Определение 6.2. Способ начисления процентов, при котором доход за последовательные равные промежутки времени вычисляется в виде определенной доли от текущей суммы долга (от первоначальной суммы вместе с начисленными в предыдущих периодах процентами) называется начислением при ставке сложных процентов.

Пусть P – начальная сумма долга (размер кредита, вклада), i % – сложная ставка в единицу времени.

Пусть S_n – наращенная сумма долга в каждом из периодов времени:

$S_0 = P, \quad S_1 = S_0 + S_0 i = P + Pi = P(1+i), \quad S_2 = S_1 + S_1 i = S_1(1+i) = P(1+i)^2, \ldots,$

$$S_n = P\left(1+i\right)^n. \qquad (6.2)$$

Формула (6.2), n = 0, 1, 2, ... называется формулой сложных процентов. Последовательность $\left\{S_n\right\}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $\left(1+i\right)^n$.

Пример 6.5. Денежные средства в размере 500 тысяч рублей предприниматель поместил в банк при сложной процентной ставке 10% годовых. Записать последовательность наращенных сумм денежных средств на счете по годам за 4 года.

$P = 500$ тысяч рублей, $i = \frac{10\%}{100} = 0{,}1$.

$S_1 = 500 \cdot \left(1 + 0{,}1\right)^1 = 550$ тысяч рублей.

$S_2 = 500 \cdot \left(1 + 0{,}1\right)^2 = 605$ тысяч рублей.

$S_3 = 500 \cdot \left(1 + 0{,}1\right)^3 = 665{,}5$ тысяч рублей.

$S_4 = 500 \cdot \left(1 + 0{,}1\right)^4 = 732{,}05$ тысяч рублей.

За 4 года предприниматель заработает 732,5 – 500 = 232,5 тысячи рублей.

Изменение сложной процентной ставки в течение срока. Весь период времени n разбивается на несколько подпериодов, в каждом из которых действует своя процентная ставка (рис. 6.1).

При таком начислении сложных процентов наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$S_n = P\left(1+i_1\right)^{n_1}\left(1+i_2\right)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \left(1+i_k\right)^{n_k}.$$

Пример 6.6. По контракту проценты на размещенные в банке финансовые средства в размере 1 миллиона рублей будут начисляться в следующем порядке: в первый год 12%, на следующие два года 14% и на оставшиеся три года 15%. Найти наращенную сумму.

Решение. $P = 1000000$ рублей, $i_1 = \dfrac{12\%}{100} = 0{,}12$, $i_2 = \dfrac{14\%}{100} = 0{,}14$, $i_3 = \dfrac{15\%}{100} = 0{,}15$, $n_1 = 1$ год, $n_2 = 2$ года, $n_3 = 3$ года.

$S_6 = 1000000 \cdot (1 + 0{,}12)^1 \cdot (1 + 0{,}14)^2 \cdot (1 + 0{,}15)^3 = 2213712{,}65$ руб.

За шесть лет прибыль по данному контракту составит 1213712,65 руб.

m**-кратное начисление сложных процентов.** Как правило, сложные проценты начисляются не единожды в год, а несколько раз в год: ежеквартально, ежемесячно и так далее.

$$S_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}. \tag{6.3}$$

Пример 6.7. Денежные средства в размере 500 тысяч рублей предприниматель поместил в банк при сложной процентной ставке 10% годовых. Найти наращенную за 4 года сумму, если проценты начисляются: а) ежеквартально, б) ежемесячно.

Решение. $P = 500$ тысяч рублей, $i = \dfrac{10\%}{100} = 0{,}1$, $n = 4$ года. а) $m = 4$, б) $m = 12$.

а) $S_4 = 500000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}1}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 742252{,}81$ руб.

б) $S_4 = 500000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}1}{12}\right)^{4 \cdot 12} = 744677{,}05$ руб.

Раздел 2. Основы математического анализа

В различных науках приходится иметь дело с анализом разнообразных величин, их количественными характеристиками и зависимостями друг от друга. Не исключено, что эти зависимости можно описать математическим способом. Например, очевидна зависимость прибыли от количества товара на рынке, которая для разного рода товаров будет различаться. Эту ситуацию можно объяснить тем, что издержки при производстве товара, его хранении и т.п. начинают возрастать быстрее, чем выручка от реализации. Изучая эту зависимость, можно сформулировать некоторые вопросы. При каком количестве товара на рынке имеет смысл его увеличение для роста прибыли, а при каком –любое его увеличение ведет к снижению прибыли? Сколько товара должно быть на рынке, чтобы его реализация давала максимально возможную прибыль? Математические методы исследования позволяют достаточно точно ответить не только на эти вопросы, но и на ряд других. Это позволит более полно оценить влияние количества товара на прибыль. Изучению методов, стоящих в основе исследования, и посвящен данный курс.

7. Производная функции одной переменной

7.1. Понятие производной. Односторонние и бесконечные производные

***Определение* 7.1.** Пусть функция $y=f(x)$ определена в окрестности точки x, $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ приращение функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx. Если существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

то его называют **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначают

$$f'(x),\ y'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Отметим, что под пределом функции понимается стремление значений функции $f(x)$ к значению функции в точке x_0 $f(x_0)$ при x стремящихся к x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Операцию нахождения производной называют **дифференцированием**.

Физический смысл производной: величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ равна **средней скорости** изменения функции $y=f(x)$ при изменении аргумента от x до $x+\Delta x$, а производная $f'(x)$ – **мгновенной скорости** изменения функции $y=f(x)$ в точке x.

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \infty \ (+\infty, -\infty)$, то говорят, что в точке x функция $y = f(x)$ имеет **бесконечную производную** (бесконечную производную знака «+», бесконечную производную знака «–»).

Правостороннюю $f'_+(x)$ и **левостороннюю** $f'_-(x)$ производные функции $y = f(x)$ в точке x определяют равенствами

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ называют односторонними.

Для существования производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x необходимо и достаточно, чтобы в этой точке обе односторонние производные существовали и были равны между собой, т.е. $f'_+(x) = f'_-(x)$, при этом $f'(x) = f'_+(x) =$ $f'_-(x)$.

Значение производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ равно угловому коэффициенту $k = tg\varphi$ касательной TT' к графику этой функции, проведённой через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, см. рис. 7.1 (геометрический смысл производной).

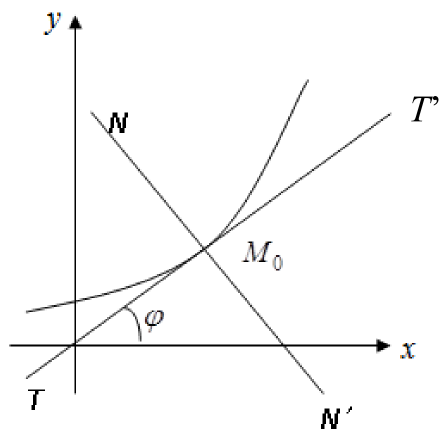


Рис. 7.1. Геометрический смысл производной

Уравнение касательной TT' к графику функции $y = f(x)$ в его точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали NN' к графику функции $y = f(x)$ в его точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Углом между двумя кривыми в их общей точке называют угол между касательными к этим кривым в рассматриваемой точке.

Пример 7.1. Для функции $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ -x^2+2x, & x>1 \end{cases}$ найти односторонние производные $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Определить, имеет ли функция в точке $x=1$ производную.

Решение. При $x\le 1$ функция определяется формулой $f(x)=x$, поэтому
$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=1.$$

При $x>1$ функция $f(x)=-x^2+2x$, следовательно,
$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{-(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)-1}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{-1-2\Delta x-(\Delta x)^2+2+2\Delta x-1}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to +0}\Delta x=0.$$

Итак, $f'_+(1)=1$, $f'_-(1)=0$. Поскольку $f'_+(1)\ne f'_-(1)$, то производная $f'(1)$ не существует.

Для вычисления производных следует использовать таблицу производных основных элементарных функций и правила дифференцирования.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^a\right)'=a\cdot x^{a-1},\ a\ne 0,$ 2. $(\sin x)'=\cos x$. 3. $(\cos x)'=-\sin x$.

$a-$действительное число.

4. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. 5. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. 6. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 8. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$. 9. $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

10. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a, a>0, a-$действительное число. 11. $\left(e^x\right)'=e^x$.

12. $\left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\ne 1,$ 13. $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

$a-$ действительное число.

7.2. Основные правила дифференцирования

Пусть $c-$постоянная величина и функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы, тогда

1. $(c)'=0$. . 2. $(cu)'=c\cdot u'$. 3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$. 5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}, v\ne 0$.

Пример 7.2. Применяя таблицу производных и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$;   2) $y = x^3 \cdot arctgx$;

3) $y = x\sqrt{x} \cdot (3\ln x - 2)$;   4) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;

Решение. 1) $y' = \left(2x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + (7x)' + (4)' = 2\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' + 7(x)' + 0 =$
$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 = 6x^2 - 10x + 7$.

2) $y' = \left(x^3\right)' arctgx + x^3 (arctgx)' = 3x^2 arctgx + \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

3) Перепишем функцию в следующем виде $y = x^{3/2} \cdot (3\ln x - 2)$, тогда

$$y' = \left(x^{3/2}\right)' \cdot (3\ln x - 2) + x^{3/2} \cdot (3\ln x - 2)' = \frac{3}{2}x^{1/2} \cdot (3\ln x - 2) + x^{3/2} \cdot \frac{3}{x} =$$

$$\frac{9}{2}x^{1/2} \cdot \ln x - 3x^{1/2} + 3x^{1/2} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

4) $$y' = \frac{(\sin x - \cos x)' \cdot (\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x) \cdot (\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$\frac{(\cos x + \sin x) \cdot (\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x) \cdot (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Пример 7.3. Вычислить $f'(x_0)$, если

1) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{16}{x}, x_0 = 8$;   2) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x - 2), x_0 = 2$.

Решение. При решении данных примеров следует сначала найти производные $f'(x)$, а затем вычислить их значения в точках x_0:

1) $f'(x) = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{16}{x^2}$; $f'(8) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{8}} - \dfrac{16}{8^2} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{7}{12}$;

2) $f'(x) = 2x\cos(x - 2) - x^2 \sin(x - 2)$; $f'(2) = 2 \cdot 2\cos 0 - 2^2 \sin 0 = 4$.

7.3. Производная сложной функции

Пусть функция y зависит от переменной z, $y = f(z)$, а переменная z в свою очередь является функцией от независимой переменной x, $z = u(x)$, т.е. задана сложная функция $y = f(u(x))$.

Теорема 7.1. Если $y = f(z)$ и $z = u(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточной переменной z, умноженной на производную самой переменной z – производную внутренней функции $u(x)$ по независимой переменной x, т.е.

$$y' = \Big(f\big(u(x)\big)\Big)' = f'(u(x)) \cdot u'(x). \qquad (7.1)$$

Пример 7.4. Вычислить производную сложной функции.

1) $y = \left(2x^5 + 3\right)^4$; 2) $y = \sin(2x+5)$;

3) $y = \ln tg\dfrac{x}{2}$; 4) $y = \arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}, |x<1|$;

5) $y = e^x \cdot arctg\, e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Решение. 1) Применим формулу (7.1) производной сложной функции, учитывая, что промежуточный аргумент $u = \left(2x^5+3\right)$, а $f(u) = u^4$. Вычислим

$f'(u) = 4u^3, u'(x) = \left(2x^5+3\right)' = 10x^4$,

подставляя в формулу (3.1), получим

$y' = y'_x(x) = 4\left(2x^5+3\right)^3 \cdot 10x^4 = 40x^4 \cdot \left(2x^5+3\right)^3$.

2) $y' = \cos(2x+5)\cdot(2x+5)' = 2\cos(2x+5)$.

3) При нахождении производной здесь последовательно дважды используется формула производной сложной функции:

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \left(tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

4) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)' =$$

$$= \frac{\left(1+x^4\right)}{\sqrt{\left(1+2x^2+x^4\right)\left(1-2x^2+x^4\right)}} \cdot \frac{4x\cdot\left(1+x^4\right) - 4x^3\cdot 2x^2}{\left(1+x^4\right)^2} = .$$

$$= \frac{1}{\left(1-x^4\right)} \cdot \frac{4x\cdot\left(1-x^4\right)}{\left(1+x^4\right)} = \frac{4x}{\left(1+x^4\right)}.$$

5) Используя свойства логарифма, перепишем исходную функцию в виде $y = e^x \cdot arctge^x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)$ и вычислим производную

$$y' = \left(e^x \cdot arctge^x\right)' - \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)\right)' = (e^x)' \cdot arctge^x + e^x \cdot \left(arctge^x\right)' = e^x \cdot arctge^x +$$

$$+ e^x \cdot \frac{1}{1+\left(e^x\right)^2} \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot 2e^{2x} = e^x \cdot arctge^x + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = e^x \cdot arctge^x.$$

8. Интегральное исчисление функции одной переменной

8.1. Первообразная и неопределённый интеграл

***Определение* 8.1.** Функцию $F(x)$, $x \in X$, называют *первообразной* функции $f(x)$ на множестве X, если $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$. Если $F(x)$– первообразная функции $f(x)$, $x \in X$, то функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x) + C$, где C– некоторая постоянная.

***Определение* 8.2.** Множество всех первообразных функции $f(x)$ называют *неопределённым интегралом* и обозначают $\int f(x) \cdot dx$. По определению $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$– одна из первообразных функции $f(x)$, C– произвольная постоянная.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. $\left(\int f(x) \cdot dx\right)' = f(x)$. 2. $d\left(\int f(x) \cdot dx\right) = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$. 4. $\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)dx$ $(\alpha = const, \alpha \neq 0)$.

5. $\int (f(x) \pm g(x)) \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx$.

6. Если $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$ и $u(x)$– любая дифференцируемая функция, то $\int f(u(x)) \cdot du(x) = F(u(x)) + C$.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$. 2. $\int 1 \cdot dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$ $(\alpha = const, \alpha \neq -1)$. 4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a,\ a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$. 9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$ 11. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} arctgx + C, \\ -arcctgx + C. \end{cases}$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$. 13. $\int \dfrac{dx}{1 - x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1 + x}{1 - x}\right| + C$.

В силу свойства 6 таблицу интегралов можно расширить, заменив в приведённых выше формулах независимую переменную x на переменную интегрирования $u = u(x)$ (тогда во всех формулах dx заменится на $du = u'(x)dx$).

8.3. Метод непосредственного интегрирования

Пример 8.1. Используя тождественные преобразования подынтегральных выражений и свойства неопределённых интегралов, свести к табличным и вычислить следующие интегралы:

1) $\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}\right)\cdot dx$; 2) $\int\left(3-x^2\right)^3dx$; 3) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$; 5) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$; 6) $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx$;

7) $\int 2^x\left(1+3x^2\cdot 2^{-x}\right)dx$.

Решение. 1) Используя свойства 4, 5 получим:

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx=5\int\cos xdx+2\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|+C.$$

2) $$\int\left(3-x^2\right)^3dx=\int\left(27-27x^2+9x^4-x^6\right)dx=27\int dx+27\int x^2dx+$$

$$+9\int x^4dx-\int x^6dx=27x-\frac{27}{3}x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{x^7}{7}+C.$$

3) Разделим числитель подынтегральной функции почленно на знаменатель, тогда

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2\sqrt{x}}{3}+2\sqrt{x}+C.$$

4) Заменим единицу в числителе подынтегральной функции на тригонометрическую, получим

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+tgx+C.$$

5) В числителе добавим и отнимем единицу, затем разобьем дробь на сумму двух дробей:

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1}{1+x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{1+x^2}dx+arctgx+$$

$$+C=\int\left(x^2-1\right)dx+arctgx+C=\frac{x^3}{3}+xarctgx+C.$$

6) Воспользуемся свойством степеней:

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot 9^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C.$$

7) Раскроем скобки и упростим выражение:

$$\int 2^x(1+3x^2\cdot 2^{-x})dx=\int\left(2^x+3x^2\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}+C.$$

8.4. Понятие и основные свойства определённого интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разделим отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $x_0 = a < x_1 < x_2 <...< x_n = b$. На каждом из получившихся отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ длины $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,...,n$. Построим для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ **интегральную сумму** $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta_i$ и положим $\lambda = \max_{i=1,...,n} \Delta_i$.

Если существует предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек ξ_i, то этот предел называют **определённым интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta_i,$$

функцию $f(x)$ в этом случае называют интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

• Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

• Если функция интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Геометрический смысл определённого интеграла. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен **площади криволинейной трапеции**, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой $y = f(x)$, см. рис. 8.1.

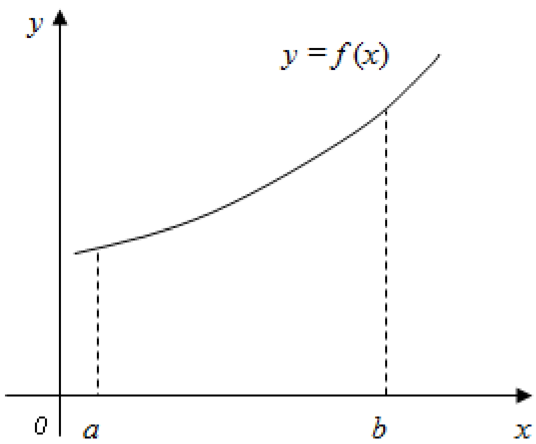


Рис. 8.1. Геометрический смысл определенного интеграла

Основные свойства определённого интеграла

1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $k-$ произвольное число, то $k\cdot f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x)\pm g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx \pm \int_a^b g(x)\cdot dx.$$

3. $\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$.

4. $\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6. Если $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\cdot dx \geq 0$.

7. Если $f(x)\geq g(x)\ \ \forall x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\cdot dx \geq \int_a^b g(x)\cdot dx$.

8. Если $f(x)\geq g(x)\ \forall x\in[a,b]$ и существует точка $x_0\in[a,b]$, в которой $f(x_0)>g(x_0)$, причём обе функции f и g непрерывны в этой точке, то $\int_a^b f(x)dx >$ $\int_a^b g(x)dx$.

Свойства 4-8 формулируются в предположении, что все используемые в них интегралы существуют.

9. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $m-$ наименьшее, $M-$ наибольшее значение $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$m\cdot(b-a)\leq\int_a^b f(x)\cdot dx\leq M\cdot(b-a).$$

10. (*Теорема о среднем.*) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $c\in[a,b]$ такая, что справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

при этом $f(c)$ называют средним значением функции на отрезке $[a,b]$.

8.5. Вычисление определённого интеграла

1. **Формула Ньютона-Лейбница**. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$– её первообразная, то верна формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример 8.2. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{5x^4 - 3x}{x}dx$.

Решение. Найдем область определения функции, чтобы убедиться, что она определена на отрезке $[1;3]$: $D(f): x \neq 0, 0 \notin [1;3]$.

$$\int_1^3 \frac{5x^4 - 3x}{x}dx = \int_1^3 \left(\frac{5x^4}{x} - \frac{3x}{x}\right)dx = \int_1^3 \left(5x^3 - 3\right)dx = \left(\frac{5x^4}{4} - 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{5 \cdot 3^4}{4} - 9 - \left(\frac{5 \cdot 1^4}{4} - 3\right) = \frac{405}{4} - 9 - \frac{5}{4} + 3 = 100 - 6 = 94.$$

8.6. Вычисление площадей плоских фигур

Вычисление площади любой плоской фигуры следует свести к вычислению суммы или разности площадей криволинейных трапеций и далее воспользоваться геометрическим смыслом определённого интеграла: пусть на плоскости XOY задана фигура, ограниченная отрезком $[a;b]$ оси OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 8.1).

Если фигура ограничена сверху и снизу двумя графиками функций $y_1 = f_1(x)$ $y_2 = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис. 8.2), где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные и неотрицательные на $[a;b]$ функции, тогда площадь данной фигуры равны разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью OX. Следовательно, площадь S данной фигуры равна

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx.} \qquad (8.1)$$

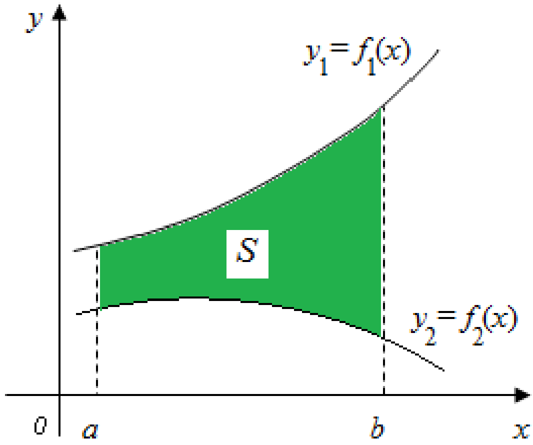


Рис. 8.2. Геометрический смысл определенного интеграла

***Пример* 8.2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$x - y + 3 = 0$ и $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение. Выразим y из первого уравнения: $y_1 = 3 + x$. y_1 – это прямая, которая строится по двум точкам (0; 3) и (2; 5). Парабола $y_2 = x^2 - 4x + 3$ строится по точкам: $x_{вершины} = 4/2 = 2$, $y_{вершины} = -1$.

Найдем точки пересечения прямой и параболы, решив систему:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}.$$

Получаем 2 точки: (0; 3) и (5; 8), абсциссы точек будут верхним и нижним пределами интегрирования $a = 0$, $b = 5$ (рис. 8.3).

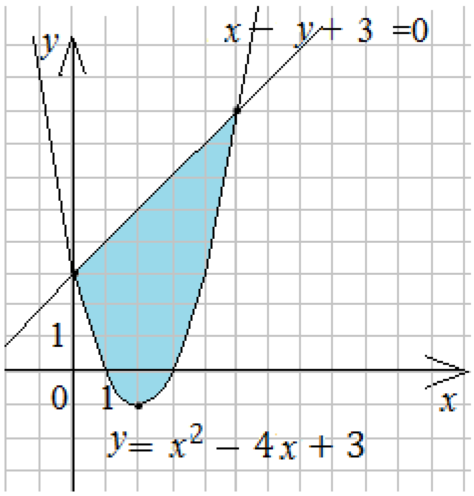


Рис. 8.3 Иллюстрация решения примера

Вычислим площадь закрашенной фигуры:

$$S = \int_a^b (y_1 - y_2)dx = \int_0^5 \left(x + 3 - (x^2 - 4x + 3)\right)dx = \int_0^5 (5x - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{5}{2}5^2 - \frac{5^3}{3} - 0 = \frac{125(3-2)}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.).}$$

Раздел 3. Основы теории вероятностей

Теория вероятностей – это большой, интенсивно развивающийся раздел математики, изучающий случайные явления. Почти во всех областях человеческой деятельности часто приходится встречаться с явлениями особого типа, которые называются случайными.

Случайное явление – явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта (эксперимента, наблюдения) протекает каждый раз по-разному и предсказать исход такого явления невозможно. Однако и случайные явления подчиняются некоторым закономерностям, которые называются вероятностными закономерностями.

Мы будем иметь дело с массовыми случайными явлениями, то есть будем предполагать, что принципиально возможно повторение одних и тех же условий, при каждом из которых может произойти или не произойти некоторое случайное явление.

Таким образом, теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает математические модели массовых случайных явлений. В теории вероятностей используются результаты и методы многих областей математики (комбинаторики, математического анализа, алгебры, логики и др.). Задачи теории вероятностей необычны и часто имеют нематематическую постановку. Это объясняется тем, что зарождение теории вероятности связано с комбинаторными задачами азартных игр. Именно они привели к задачам, которые не укладывались в рамки существовавших математических теорий и тем самым стимулировали поиск новых понятий, подходов, идей.

Теория вероятностей развивалась из потребностей практики и представляла собой прикладную дисциплину. В связи с этим ее понятия и выводы имели характерные черты тех областей знаний, в которых они были получены. Лишь постепенно появилось то общее, что присуще вероятностным схемам, независимо от области их приложения и что позволило превратить теорию вероятностей в надежный, точный и эффективный метод познания.

9. Комбинаторика. Соотношения между событиями. Определение вероятности

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют элементы комбинаторики. Приведем наиболее используемые из них.

9.1. Элементы комбинаторики

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!, \text{ где } \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Заметим, что $0! = 1$.

***Пример* 9.1.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в состав числа только один раз?

Решение. Искомое количество трехзначных чисел $P_3 = 3! = 6$.

***Пример* 9.2.** Каким числом способов можно рассадить 5 гостей на 5 мест?

Решение. Искомое количество способов равно $P_5 = 5! = 120$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

***Пример* 9.3.** Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2 цвета?

Решение. Искомое число сигналов $A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$.

***Пример* 9.4.** Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Этот же вопрос, если одна из полос красного цвета?

Решение. Количество различных флагов равно $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$.

Количество различных флагов, у которых нет красной полосы равно $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$, тогда количество флагов с красной полосой 60-24=36.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Заметим, что $C_n^1 = n$, $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

***Пример* 9.5.** Сколькими способами можно выбрать 2 детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

***Пример* 9.7**. Из 20 сотрудников лаборатории 5 должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов группы, если заведующий лабораторией и 2 ведущих инженера одновременно уезжать не должны?

Решение. Общее количество групп равно $C_{20}^5 = \frac{20!}{5!(20-5)!} = 15504$.

Если заведующий и 2 ведущих инженера оказались в одной группе, то свободных мест осталось 2 и на них претендует 17 человек, т.е. $C_{17}^{2}=\frac{17!}{2!15!}=136$ – количество групп, которые не могут поехать, тогда 15504-136=15368 – искомое количество составов групп.

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны соотношением $A_n^m = P_m C_n^m$.

9.2. Правила комбинаторики

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект В может быть выбран другими n способами, то выбрать либо А, либо В можно $m+n$ способами.

***Пример* 9.8.** На тарелке лежат 8 яблок и 6 груш. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

Решение. Яблоко можно выбрать $m=8$ способами, грушу – $n=6$ способами. По правилу суммы существует $m+n=8+6=14$ способов выбрать один фрукт.

Правило произведения. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект В может быть выбран n способами, то пара объектов А и В в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

***Пример* 9.9.** Из группы студентов в 30 человек необходимо выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Решение. Старостой может быть любой из 30 студентов, его заместителем – любой из оставшихся 29 человек, т.е. $m=30, n=29.$ По правилу произведения общее число способов выбора равно $m \cdot n = 30 \cdot 29 = 870$.

***Пример* 9.10.** Наряд студентки состоит из блузки, юбки и туфель. Девушка имеет в своем гардеробе четыре блузки, пять юбок и три пары туфель. Сколько нарядов может иметь студентка?

Решение. По правилу произведения общее число нарядов равно $m \cdot n \cdot k = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60.$

9.3. Случайные события и соотношения между ними

В теории вероятностей к основным понятиям относится случайное событие или просто событие. В реальной ситуации **событие** – любой факт, который имеет место в природе. Любое событие происходит при определенном комплексе условий (испытаний), который будем обозначать G.

***Определение* 9.1.** Событие, которое обязательно произойдет при выполнении определенного комплекса условий G, называется **достоверным** событием и обозначается Ω.

Например, пусть комплекс условий G – монета подбрасывается один раз, Ω={появление герба или цифры}.

***Определение* 9.2.** Событие, которое обязательно не произойдет при выполнении определенного комплекса условий G, называется **невозможным** событием и обозначается $\emptyset$.

Например, пусть комплекс условий G – монета подбрасывается один раз, $\emptyset$={появление двух гербов}.

***Определение* 9.3.** Событие, которое то происходит, то не происходит при выполнении определенного комплекса условий G, называется **случайным** и обозначается большими латинскими буквами *A, B, C,...* или $A_1, A_2, \ldots$

Например, пусть комплекс условий G – монета подбрасывается один раз, *A*={появление герба}, *B*={появление цифры} – это случайные события.

Введем некоторые соотношения между событиями.

1. Если каждый раз как происходит событие *A,* обязательно происходит и событие *B,* то говорят, что событие *A* **влечет за собой** событие *B*: $A \subset B$. Здесь *A* – причина, *B* – обязательное следствие.

2. Если событие *A* влечет за собой событие *B* и событие *B* влечет за собой событие *A*, то события *A* и *B* называются **равносильными** или равными друг другу: $A = B$.

3. Событие, состоящее в наступлении обоих событий *A и B* или в их совместном происхождении, называется **произведением** событий *A* и *B* : *AB* или $A \cap B$.

4. Событие, состоящее в происхождении хотя бы одного из событий *A* и *B*, называется **суммой** событий *A* и *B* : $A + B$ или $A \cup B$.

5. Событие, состоящее в том, событие *A* происходит, а событие *B* не происходит, называется **разностью** событий *A* и *B: A-B* или *A/B*.

6. Событие, состоящее в том, происходит или событие *A* или событие *B,* но не происходит их совместная реализация (произведение), называется **симметричной разностью** событий *A* и *B*: $A \circ B = (A + B) - AB$.

7. Два события *A* и $\overline{A}$ называются **противоположными**, если для них одновременно выполняются два соотношения: $A + \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \emptyset$. Событие $\overline{A}$, противоположное событию *A*, заключается в непроисхождении *A,* т.е. $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда *A* не происходит.

8. Два события *A* и *B* называются **несовместными** (несовместимыми), если их совместное появление невозможно при выполнении определенного комплекса условий G, т.е. $AB = \emptyset$. В противном случае события *A и B* называются **совместными.**

9. Событие *A* подразделяется на **частные случаи**, представляющие из себя события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если выполняются два условия: *A* представимо в виде суммы событий $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ и в этой сумме все слагаемые попарно несовместны, т.е. $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$

***Определение* 9.4. Полной группой событий** при выполнении определенного комплекса условий G, называется такая совокупность, которая представляет собой все возможные исходы испытания или опыта, если

$\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.. Полная группа попарно несовместных событий, если выполняется дополнительное условие $A_i\, A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$.

***Определение* 9.5.** Множество событий S называют **полем событий**, если

1) Достоверное и невозможное события принадлежат этому множеству, т.е. $\Omega \subset S$, $\emptyset \subset S$.

2) Если множеству событий S принадлежат события A и B, то ему принадлежат также события $A\,B$, $A + B$, $A - B$, $A \circ B$.

Для лучшего понимания операций над событиями используют условные графические изображения – **диаграммы Вьенна** (рис. 9.1).

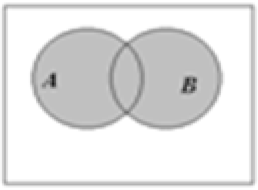
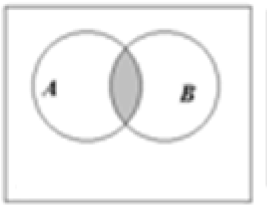
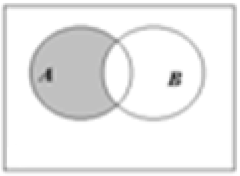
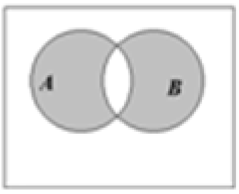
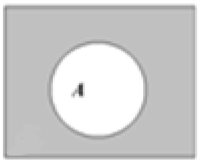
	Сумма событий $A + B$
	Произведение событий AB
	Разность событий $A - B$
	Симметричная разность событий $A \circ B$
	Противоположное событие $\overline{A}$

Рис. 9.1. Диаграммы Вьенна

***Определение* 9.6.** Любой единичный исход эксперимента (опыта, наблюдения) можно назвать **элементарным исходом** или **элементарным событием** и обозначить через ω. Всю совокупность таких исходов называют множеством элементарных исходов и обозначают Ω.

***Пример* 9.11.** Опыт состоит в подбрасывании один раз игральной кости. Описать множество элементарных событий Ω и состав подмножеств, соответствующих указанным событиям: A={выпадет число кратное трем}, B={выпадет четное число}, C = {выпадет число больше трех}, D = {выпадет число меньше семи}, E = {выпадет дробное число}. Выявить пары совместных и несовместных событий.

Решение. Множество элементарных исходов имеет вид: $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Соответствующие подмножества: $A = \{\omega_5, \omega_6\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $D = \Omega$, $E = \emptyset$.

Совместные события: *A и B, A и C, A и D, C и B , D и B, C и D.*

Несовместные события: *A и E , B и E , C и E , D и E.*

9.4. Вероятность события. Различные подходы к определению вероятностей

Случайные события в одних и тех же условиях различаются по частоте или возможности их реализации.

Для того, чтобы количественно сравнивать события между собой по степени их возможности, необходимо с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно это событие. Такое число назовем вероятностью события.

Определение **9.7. Вероятность события** есть численная мера степени объективной возможности происхождения этого события при выполнении комплекса условий G. Будем обозначать вероятность события $P(A)$.

Сравнивая между собой различные события по степени их объективной возможности, мы должны установить какую-то единицу измерения. В качестве такой единицы естественно принять вероятность достоверного события. Если приписать достоверному событию вероятность, равную 1, то все другие события – возможные но не достоверные, будут характеризоваться вероятностями, меньшими 1. Невозможному событию естественно приписать вероятность, равную 0. Тогда $0 < P(A) < 1$.

Для определения вероятности существуют различные подходы.

1. **Классическое определение вероятности**

Вероятность события A равна отношению числа возможных исходов испытания m, благоприятных для наступления события A, к числу всех возможных исходов испытания n, при условии, что эти исходы равновозможны или равновероятны

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{9.1}$$

Основным условием применения классического определения вероятности является то, что число исходов конечно и эти исходы равновозможны.

Пример **9.12.** Для случайных событий из задачи 9.11 найти вероятности.

Решение. $n=6$, $m_A=2$, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, аналогично по формуле (9.1) $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{6}{6} = 1$, $P(E) = \frac{0}{6} = 0.$

***Пример* 9.13.** В партии из 60 изделий имеются 10 бракованных. Из партии наудачу выбираются 8 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 8 изделий будет 2 бракованных (событие A).

Решение. Событие A= {среди отобранных 8 изделий будет 2 бракованных}.

Построим схему выбора изделий:

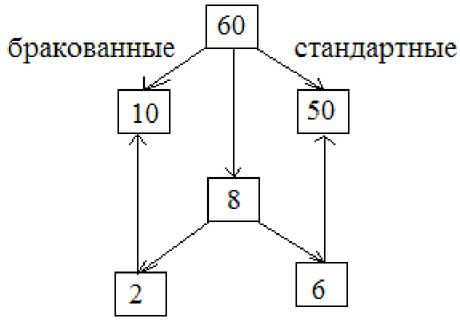


Рис. 9.2. Схема выбора изделий

Число всех равновозможных исходов определяется как $n = C_{60}^{8} = \frac{60!}{8!\cdot 52!} = \frac{53\cdot\cancel{54}\cdot 55\cdot\cancel{56}\cdot 57\cdot\cancel{58}\cdot 59\cdot\cancel{60}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{8}} = \frac{53\cdot 9\cdot 55\cdot 57\cdot 29\cdot 59}{1} =$.
$= 2558620845.$

Так как всего бракованных изделий 10, то число способов, которыми можно вынуть 2 из них, равно $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$. Каждая такая совокупность из 2 бракованных изделий будет дополняться 6 стандартными изделиями, которые будут выбираться из общего числа 54 стандартных изделий. Число способов выбора таких совокупностей равно

$$C_{50}^{6} = \frac{50!}{6!\cdot 44!} = \frac{45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}} = 3\cdot 46\cdot 47\cdot 49\cdot 50 = 15890700.$$

Следовательно, по правилу произведения число исходов, благоприятствующих появлению события A, равно $m = C_{10}^{2}\cdot C_{50}^{6} = 715081500$.

Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{2} C_{50}^{6}}{C_{60}^{8}} = \frac{715081500}{2558620845} = 0{,}279$.

2. **Геометрическое определение вероятности**

По классическому определению $P(A) = \frac{m}{n}$, где m и n- конечные величины. В таком случаи, когда либо m, либо n=∞, то классическое определение нельзя использовать. Действительно, пусть m=∞, а n конечно, тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\infty}{n} = \infty$, что противоречит условию 0<$P(A)$<1.

Пусть m конечно, а n=∞, получаем $P(A)=\dfrac{m}{\infty}=0$, что опять противоречит условию 0<$P(A)$<1, так как событие A не является невозможным.

Если n=∞ и m=∞, тогда $P(A)=\dfrac{\infty}{\infty}$, а это неопределенность.

В этом случае переходят на геометрический язык и используют геометрическое определение вероятности.

Пусть имеется на плоскости некоторая область G и в ней содержится другая область g. В область G случайным образом бросается точка и спрашивается: чему равна вероятность того, что точка попадет в область g? Тогда вероятность определится как

$$P(A)=\frac{mesg}{mesG}, \tag{9.2}$$

где mes – мера области (длина, площадь, объем и т.д.) не зависит от расположения и формы области.

***Пример* 9.14.** В круг радиуса 8 помещен меньший круг радиуса 5. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в больший круг, попадет также и в меньший круг.

Решение. Пусть событие $A=\{$попадание точки в меньший круг$\}$. Вероятность этого события определяется как отношение площадей, пусть $S_б$ – площадь большего круга, $S_м$ – площадь меньшего круга. Тогда по формуле (9.2) $P(A)=\dfrac{S_м}{S_б}$. Так как $S_б=64\pi$, $S_м=25\pi$, то $P(A)=\dfrac{25\pi}{64\pi}\approx 0{,}39$.

3. **Статистическое определение вероятности**

При решении практических задач, часто нет возможности определить все возможные исходы испытания или опыта и указать те исходы, которые благоприятны наступлению события и поэтому использование классического или геометрического подхода становится невозможным. В этом случае используют статистический (эмпирический) подход.

Пусть A – некоторое событие. Для определения вероятности события A в неизменных условиях осуществляется либо достаточно большое число наблюдений над этим событием, либо несколько серий таких наблюдений.

1) Пусть в первой серии наблюдений проведено n_1 наблюдений, в которых событие A произошло m_1 раз, тогда $\dfrac{m_1}{n_1}$ называется относительной частотой появления события A в 1-й серии испытаний;

2) Пусть во второй серии наблюдений проведено n_2 наблюдений, в которых событие A произошло m_2 раз, тогда $\dfrac{m_2}{n_2}$ называется относительной частотой появления события A во 2-й серии испытаний;

………………………………………..

к) Пусть в *к-й* серии наблюдений проведено $n_к$ наблюдений, в которых событие *А* произошло $m_к$ раз, тогда $\frac{m_k}{n_k}$ называется относительной частотой появления события *А в к-й* серии испытаний.

В данной ситуации возможны два случая:

1) Относительные частоты в разных сериях испытаний существенно отличаются друг от друга: $\frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2} \neq \frac{m_k}{n_k}$. Это значит, что неконтролируемые нами условия оказывают существенное влияние и определить вероятность события в этом случае невозможно.

2) Относительные частоты приблизительно равны: $\frac{m_1}{n_1} \approx \frac{m_2}{n_2} \approx \frac{m_k}{n_k} \approx P(A)$. В этом случае устойчивости относительных частот та средняя величина, относительно которой происходят колебания относительных частот и принимается за вероятность события.

***Пример* 9.15.** В некотором городе в январе родилось 145 мальчиков и 135 девочек, в феврале – 142 мальчика и 136 девочек, в марте – 152 мальчика и 140 девочек. Требуется определить вероятность рождения мальчика (событие *А*).

Решение. Определим относительные частоты рождения мальчиков: в январе $\frac{145}{280} \approx 0{,}518$, в феврале $\frac{142}{278} \approx 0{,}511$, в марте $\frac{152}{292} \approx 0{,}521$. Относительные частоты ведут себя устойчиво, поэтому $P(A) = \frac{0{,}518 + 0{,}511 + 0{,}521}{3} \approx 0{,}517$.

В тех случаях, когда одновременно со статистическим, вероятность события может быть определена и классическим путем, различие между статистической и классической вероятностью тем меньше, чем больше было проведено наблюдений.

Например, пусть событие *А*={выпадение герба при одном подбрасывании монеты}. По классическому определению $P(A) = \frac{1}{2}$. Чтобы проверить этот факт, Бюффон провел 4040 подбрасываний монеты, из них герб выпал 2048 раз, так что относительная частота события *А* оказалась равна $\frac{2048}{4040} = 0{,}507$.

Пирсон провел 24000 подбрасываний монеты, герб выпал 12012 раз, относительная частота выпадения герба оказалась равна $\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$. Таким образом, с ростом числа испытаний или в нескольких сериях таких испытаний при условии устойчивости относительных частот, отклонение относительной частоты от классической вероятности исследуемого события становится незначительным.

Контрольные вопросы

1. В книжном шкафу стоят девятитомник Ф.Купера, восьмитомник В.Скотта, шеститомник М.Рида и пятитомник Р.Киплинга. Ученик выбирает одну книгу для внеклассного чтения. Сколькими способами он может это сделать?

1) 2160;
2) 28;
3) 1;
4) 4;
5) 20;
6) нет верного ответа.

2. Три дороги соединяют города A и B, четыре дороги соединяют города B и C. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B и вернуться обратно в A также через B?

1) 14;
2) 7;
3) 28;
4) 144;
5) 4;
6) 8;
7) нет верного ответа.

3. Правление банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на одинаковые должности. Сколькими способами это можно сделать?

1) $A_{10}^{3} = 720$;
2) $C_{10}^{3} = 120$;
3) $P_3 = 6$.

4. Правление банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на разные должности. Сколькими способами это можно сделать?

1) $A_{10}^{3} = 720$;
2) $C_{10}^{3} = 120$;
3) $P_3 = 6$.

5. Решите уравнение $C_x^2 = 45, x \in N$.

1) 100;
2) 8;
3) 10;
4) –9;
5) 5.

6. Пусть комплекс условий G – игральный кубик подбрасывается один раз, тогда в нем:

1) $\Omega = \{$выпадает число меньшее 7$\}$;
2) $\emptyset = \{$выпадает дробное число$\}$;
3) $\emptyset = \{$выпадает четное число$\}$;

4) $\varnothing$={выпадает число большее 6};
5) Ω={выпадает целое число};
6) Ω={выпадает нечетное число};
7) A={выпадает четное число};
8) A={выпадает нечетное число};
9) A={выпадает отрицательное число};
10) A={выпадает число кратное 2}.

7. Если $A \subset B$, чему равны $A+B$ и $A \cdot B$?

1) B и B;
2) B и A;
3) A и A;
4) A и B.

8. Монета подбрасывается 3 раза. Рассматривается события $A=${хотя бы один раз выпал герб}, тогда противоположное событие

1) $\overline{A}=${1 раз выпал герб};
2) $\overline{A}=${2 раза выпал герб};
3) $\overline{A}=${3 раза выпал герб};
4) $\overline{A}=${2 раза выпала цифра};
5) $\overline{A}=${3 раза выпала цифра};
6) $\overline{A}=${герб не выпал ни разу}.

9. Из урны, в которой находятся 6 белых шаров и 4 черных шара, вынимают одновременно 4 шара. Тогда вероятность того, что среди отобранных 3 шара будут белыми, равна …

1) $\frac{8}{21}$;
2) $\frac{2}{21}$;
3) $\frac{2}{105}$;
4) $\frac{1}{2}$.

10. Игральная кость бросается два раза. Тогда вероятность того, что сумма выпавших очков – десять, равна …

1) $\frac{1}{12}$;
2) $\frac{1}{36}$;
3) $\frac{5}{36}$;

4) 0.

11. Внутрь круга радиуса 4 наудачу брошена точка. Тогда вероятность того, что точка окажется вне вписанного в круг квадрата, равна …

1) $\frac{\pi - 2}{\pi}$;

2) $\frac{2 - \pi}{\pi}$;

3) $\frac{2}{\pi}$;

4) $\frac{\pi}{2}$.

10. Правила сложения и умножения вероятностей

10.1. Теорема сложения вероятностей

***Теорема* 10.1.** Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Пусть A и B – несовместные события, т.е. $AB = \emptyset$, тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (10.1)$$

***Следствие* 10.1.** Вероятности прямого и противоположного событий дополняют друг друга до 1, т.е. $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

***Следствие* 10.2.** Для n попарно несовместных событий справедливо условие

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad A_i\ A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема* 10.2 *(обобщенная). Вероятность суммы двух любых событий определяется по формуле

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (10.2)$$

***Пример* 10.1.** Игральная кость брошена 1 раз (G). Найти вероятности событий A={выпадет 2 или нечетное число}, B={выпадет 2 или четное число}.

Решение. Событие A={выпадет 2 или нечетное число} произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий: A_1={выпадет 2}, A_2={выпадет нечетное число}, поэтому $A = A_1 + A_2$.

Найдем $P(A)$ по формуле (10.1), учитывая, что A_1 и A_2 - несовместные события,

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1 + A_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}.$$

Событие B={выпадет 2 или четное число} произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий: B_1={выпадет 2}, B_2={выпадет четное число}, тогда $B = B_1 + B_2$.

Найдем $P(B)$) по формуле (10.2), учитывая, что B_1 и B_2 – совместные события,

$$P(B) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

***Пример* 10.2.** Число дефектов в изделии может быть любым 0,1,2,3,......По оценке экспертов вероятность отсутствия дефектов составляет 0,9, наличия одного дефекта – 0,05. Какова вероятность того, что в изделии не более одного дефекта?

Решение. Пусть A={в изделии не более одного дефекта}, событие произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий: A_1={в изделии нет дефектов}, A_2={в изделии один дефект}, тогда $A = A_1 + A_2$.

Найдем $P(A)$) по формуле (10.1), учитывая, что A_1 и A_2 – несовместные события,

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}9 + 0{,}05 = 0{,}95.$$

10.2. Теорема умножения вероятностей

***Определение* 10.1.** Если вероятность события A определяется без каких-либо дополнительных условий или ограничений, то ее называют **безусловной вероятностью** и обозначают $P(A)$.

***Определение* 10.2.** Если вероятность события A определяется при дополнительном условии, что произошло некоторое другое событие B, то ее называют **условной вероятностью** и обозначают $P(A/B)$.

Условные вероятности определяются также как и безусловные вероятности и обладают всеми свойствами безусловных вероятностей.

***Пример* 10.3.** В урне имеется 3 белых и 2 черных шара. Рассмотрим события A={вынимают белый шар при втором испытании}, B={вынимают черный шар при первом испытании}. Найти условную вероятность $P(A/B)$.

Решение. Так как при первом испытании вынули черный шар, значит в урне осталось 4 шара, из которых 3 белых, значит $P(A/B)=\frac{3}{4}$.

***Теорема* 10.3.** Вероятность произведения двух событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого события, подсчитанную при условии, что первое событие уже произошло

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(B)\, P(A / B) \tag{10.3}$$

Из этого соотношения можно получить формулу для вычисления условной вероятности

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

***Следствие* 10.3.** Для n событий справедливо условие

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \;.....P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

***Пример* 10.4.** На станции отправления имеется 8 заказов на отправку товара, 5 внутри страны и 3 на экспорт. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад заказа окажутся предназначенными для потребления внутри страны. Решение. Пусть A={два заказа внутри страны}, это событие произойдет, если произойдут следующие события: A_1={1-й заказ внутри страны}, A_2 = {2-й заказ внутри страны}, тогда $A = A_1 A_2$. Найдем $P(A)$ по формуле (10.3), учитывая, что эти события зависимые $P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 /A_1) =\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$.

***Определение* 10.3.** Событие A называется **независимым** от события B, если происхождение или не происхождение события B не влияет на реализацию события A. В этом случае $P(A/B) = P(A)$. Если A и B - независимые события, то $P(B/A)=P(B)$ и тогда для них справедлива теорема.

***Теорема* 10.4.** Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A\, B) = P(A)\, P(B). \tag{10.4}$$

***Следствие* 10.4.** Для n независимых событий справедливо условие

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

***Пример* 10.5**. Имеется 3 ящика, в каждом из которых по 10 деталей. В 1-м ящике 7 стандартных деталей, во 2-м 8, в 3-м 9. Из каждого ящика вынимается по одной детали. Какова вероятность того, что все они стандартные?

Решение. Пусть A = {три вынутые детали стандартные}, это событие произойдет, если произойдут следующие события: A_1={деталь из 1-го ящика стандартная}, A_2 ={деталь из 2-го ящика стандартная}, A_3={деталь из 3-го ящика стандартная}, тогда $A = A_1 A_2 A_3$. Найдем $P(A)$ по формуле (10.4), учитывая, что эти события независимые $P(A) = P(A_1 A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{7}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{10} = 0{,}504$.

***Замечание* 10.1** (о принципе независимости). Часто на практике при определении независимости событий используют следующие принципы: два события будут независимыми в теоретико-вероятностном смысле, если их реальные прообразы причинно не связаны между собой. Этот принцип нельзя считать теоремой, так как независимость может исчезнуть, если незначительно изменить условия.

Например, из колоды в 52 карты вынули 1 карту. Рассмотрим события A={появление карты бубновой масти}, B={появление туза}, AB={появление бубнового туза}. Установим независимость события B, используя теорему умножения для независимых событий. $P(A)=\frac{13}{52}, P(B)=\frac{4}{52}, P(AB)=\frac{1}{52}$

$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{13}{52}\cdot\frac{4}{52}=\frac{1}{52}\Rightarrow$ события A и B – независимые события.

Теперь изменим условия эксперимента: пусть в колоде содержится еще и джокер, тогда $P(A)=\frac{13}{53}, P(B)=\frac{4}{53}, P(AB)=\frac{1}{53}$

$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{13}{53}\cdot\frac{4}{53}\neq\frac{1}{53}$ события A и B – зависимые события, т.е. из причинной независимости не следует вероятностная независимость.

Если A и B – независимые события, то независимыми будут следующие пары: $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

***Пример* 10.6.** Два стрелка стреляют по мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятности попадания стрелков соответственно равны 0,7 и 0.8. Найти вероятности следующих событий: 1) оба стрелка попадут в мишень, 2) хотя бы один стрелок попадет в мишень, 3) оба стрелка промахнутся, 4) хотя бы один стрелок промахнется.

Решение.

1) Событие A = {оба стрелка попадут в мишень} произойдет, если произойдут события: A_1 ={1-й стрелок попадет}, A_2 ={2-й стрелок попадет}, тогда

$A = A_1 \cdot A_2 A$. Найдем *P(A),* учитывая, что эти события независимые $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$

2) Событие A = {хотя бы один стрелок попадет в мишень} произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий: A_1 ={1-й стрелок попадет}, A_2 ={2-й стрелок попадет}, тогда $A = A_1 + A_2$. Найдем *P(A),* учитывая, что эти события совместные $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) – P(A_1 A_2)$ = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.

3) Событие A = {оба стрелка промахнутся} произойдет, если не произойдут события: A_1 ={1-й стрелок попадет}, A_2={2-й стрелок попадет}, тогда

$A = \overline{A}_1 \overline{A}_2$. Найдем *P(A),* учитывая, что эти события независимые $P(A) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$.

4) Событие A = {хотя бы один стрелок промахнется} произойдет, если не произойдет хотя бы одно из событий: A_1={1-й стрелок попадет}, A_2={2-й стрелок попадет}, тогда $A = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$. Найдем *P(A),* учитывая, что эти события совместные

$$P(A) = P(\overline{A}_1 + \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) + P(\overline{A}_2) – P(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}06 = 0{,}44.$$

***Пример* 10.7.** Студент в сессию должен сдать три зачета: по менеджменту, статистике и эконометрике. Вероятность успешной сдачи зачета по менеджменту равна 0,9, по статистике 0,6, по эконометрике 0,3. Найти вероятности следующих событий: а) студент успешно сдал хотя бы 2 зачета; б) сдал только один зачет.

Решение. Введем следующие события:

A= {студент успешно сдал зачет по менеджменту}, тогда $\overline{A}$ = {студент не сдал зачет по менеджменту}; B= {студент успешно сдал зачет по статистике}, тогда $\overline{B}$ = {студент не сдал зачет по статистике}, C= {студент успешно сдал зачет по эконометрике}, тогда $\overline{C}$ = {студент не сдал зачет по эконометрике}.

Вероятности этих событий: $P(A) = 0{,}9$; $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}6$; $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}3$; $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$;

Пусть событие D = {студент успешно сдал хотя бы 2 зачета}. Тогда D= {(студент сдал менеджмент и статистику, и не сдал эконометрику); или (сдал менеджмент и эконометрику, и не сдал статистику), или (сдал эконометрику и статистику, и не сдал менеджмент), или (сдал менеджмент и эконометрику, и статистику)}.

В алгебре событий событие D запишем в виде: $D = A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot C \cdot \overline{B} + C \cdot B \cdot \overline{A} + A \cdot B \cdot C$.

Следовательно,

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(A) \cdot P(C) \cdot P(\overline{B}) + P(C) \cdot P(B) \cdot P(\overline{A}) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

$$P(D) = 0{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}378 + 0{,}108 + 0{,}018 + 0{,}162 = 0{,}666$$

Вероятность сдачи зачета хотя бы по двум предметам равна 0,666 или 66,6%.

Событие E = {студент сдал только один зачет}. Тогда E = {(студент сдал менеджмент и не сдал эконометрику, и статистику); или (не сдал менеджмент и эконометрику, и сдал статистику), или (сдал эконометрику, и не сдал менеджмент и статистику)}. В алгебре событий событие E запишем в виде: $E = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot C \cdot \overline{B}$.

Следовательно, $P(E) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{C}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{A}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C)$.

$P(E) = 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}252 + 0{,}042 + 0{,}012 = 0{,}306$.

Контрольные вопросы

1. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров добавляют два черных шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Тогда вероятность того, что хотя бы один шар будет белым, равна …

1) $\dfrac{251}{286}$;

2) $\dfrac{35}{286}$;

3) $\dfrac{6}{13}$;

4) $\dfrac{138}{143}$.

2. В электрическую цепь последовательно включены два элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов элементов равны соответственно 0,1 и 0,15. Тогда вероятность того, что тока в цепи не будет, равна …

1) 0,235;
2) 0,765;
3) 0,22;
4) 0,015.

3. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,15; второй – 0,05; третий – 0,2. Тогда вероятность того, что в течение часа потребуют вмешательства наладчика все три станка, равна …

1) 0,0015;
2) 0,4;
3) 0,015;
4) 0,9985.

4. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, а вторым – 0,85. Оба стрелка стреляют одновременно. Тогда вероятность поражения цели, равна …

1) 0,985;

2) 0,775;

3) 0,875;

4) 1,75.

5. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,95, а вторым – 0,80. Оба стрелка стреляют одновременно. Тогда вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком, равна …

1) 0,23;

2) 0,95;

3) 0,875;

4) 0,17.

11. Повторные независимые испытания

11.1. Формула Бернулли

Пусть осуществляются последовательные независимые испытания в одинаковых условиях. Независимые они будут в том смысле, что результаты каждого последующего не зависят от исходов предыдущих испытаний. Пусть проведено n последовательных независимых испытаний, в каждом испытании событие A={успех} либо происходит с вероятностью $P(A)=p$, либо не происходит $\overline{A}$ ={неуспех} с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p = q$, причем эти вероятности постоянны во всех испытаниях.

Описанная схема – схема последовательных независимых испытаний с двумя исходами Бернулли или схема «успех-неуспех». В данных условиях требуется определить вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет m раз – $P_n(m)$, $m = \overline{0,m}$. Эта вероятность вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \qquad (11.1)$$

так как $m = \overline{0,m}$, и то $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(n) = 1$.

Пример **11.1.** 10 раз подбрасывается монета. Какова вероятность того, что

1) герб выпал 4 раза;
2) герб выпал хоты бы 1 раз?

Решение. A={герб}, $\overline{A}$={цифра}, n = 10, $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

1) $m = 4$, $P_{10}(4) = C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}246.$

2) $m \geq 1, P_{10}(m \geq 1) = \sum_{m=1}^{10} P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = 0{,}999.$

Пример **11.2.** По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Для получения зачета требуется не менее 3 попаданий. Найти вероятность получения зачета.

Решение. A={попадание}, $\overline{A}$={промах}, n = 5, p = 0,6, q = 0,4.

$$P_5(m \geq 3) = \sum_{m=3}^{5} P_5(m) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 0{,}683.$$

11.2. Условия, характерные для схемы Бернулли

1. Конечное число испытаний в неизменных условиях.
2. Два исхода в каждом испытании A={успех} или $\overline{A}$={неуспех}.
3. Вероятность успеха A задана и постоянна для всей серии испытаний.
4. Испытания последовательны и независимы.

Если хотя бы одно из этих условий нарушено, тот формулу Бернулли использовать нельзя.

При практическом использовании формулы Бернулли возникает вопрос об определении числа успехов m_0, вероятность реализации которого наибольшая.

Это модальное или наивероятнейшее число успехов, которое определяется по формуле: $m_0 = [np + p]$, если $np + p$ – не целое число, если $np + p$ – целое число, то возможны два наивероятнейших числа $m_0 = np + p$, $m_0 = np + p - 1$.

***Пример* 11.3.** Оптовая база снабжает 10 магазинов, от которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность этого числа заявок.

Решение. $A=\{$заявка поступила$\}$, $\overline{A}=\{$заявка не поступила$\}$, $n = 10$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$.

$m_0 = [np + p] = [10 \cdot 0{,}4 + 0{,}4] = [4{,}4] = 4$, по формуле (11.1)

$P_{10}(4) = C_{10}^{4} 0{,}4^4 0{,}6^6 = 0{,}251.$

12. Случайные величины

12.1. Понятие случайной величины и закона распределения вероятностей

***Определение* 12.1.** Переменная величина называется **случайной**, если под воздействием ряда случайных причин она в общем случае с различными вероятностями способна принимать различные числовые значения. Случайные величины будем обозначать заглавными латинскими буквами $X,Y,Z,...$, а их значения – строчными $x,y,z,..$

***Определение* 12.2.** Значения, которые может принимать случайная величина, называются спектральными. Множество этих значений называется **спектром** случайной величины, а совокупность вероятностей, с которыми реализуются различные числовые значения случайной величины из ее спектра, дает **распределение вероятностей** вдоль этого спектра. В зависимости от спектра различают два типа случайных величин:

1. Дискретные случайные величины.

Случайная величина **дискретного** типа, если ее спектр составляют значения, которые можно занумеровать и значения изолированы друг от друга:

$x_1,x_2,...,x_n$ число значений может быть конечным и бесконечным.

Например, случайная величина X – число очков на верхней грани при подбрасывании игрального кубика, спектр: $x_1 =1,\ x_1 =1,\ x_2 =2,\ldots ,x_6 =6.$

Случайная величина У – оценка на экзамене, спектр: $y_1 = 2, y_2 =3,...,y_4 =5.$ Случайная величина Z – количество попаданий при стрельбе по мишени, спектр: $z_1 =0$, $z_2 =1$,... – бесконечное множество.

2. Непрерывные случайные величины.

Случайная величина **непрерывного** типа, если ее спектр составляют значения, которые невозможно отделить друг от друга, так как они сплошь заполняют отрезок, интервал или всю числовую ось.

Например, случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке, интервал движения которого 10 минут, спектр $x \in [0,10]$.

Случайная величина Y – срок службы некоторого оборудования, спектр $y \in [0,+\infty]$.

***Определение* 12.3.** Случайная величина задана с вероятностной точки зрения, если известен закон распределения вероятностей этой величины.

***Определение* 12.4. Законом распределения вероятностей** называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Закон распределения вероятностей задается в различных формах в зависимости от типа случайных величин.

Для дискретных случайных величин – это ряд и функция распределения.

Для непрерывных – это функция распределения и плотности вероятности.

12.2. Ряд распределения, функция распределения дискретной случайной величины

Пусть X – дискретная случайная величина с конечным спектром $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим через $p_1 = P\{X = x_1\}$, $p_2 = P\{X = x_2\}, \ldots, p_n = P\{X = x_n\}$. Так как в спектре указаны все возможные значения случайной величины, то события $X = x_1$, $X = x_2, \ldots$, $X = x_n$ образуют полную группу, следовательно для них выполняется условие $p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Это условие называется условием нормировки массы вероятностей в дискретном случае.

Определение **12.5. Ряд распределения** – это таблица, в первой строке которой указаны значения случайной величины, во второй строке – вероятности, с которыми она эти значения принимает

x_i	x_1	x_2	……………..	x_n
p_i	p_1	p_2	……………..	p_n

Определение **12.6.** Графическое изображение ряда распределения – это **многоугольник распределения** или **полигон распределения**.

В декартовой системе координат по оси *Ox* будем откладывать значения x_i по оси *Oy* вероятности p_i. Точки с координатами (x_i, p_i) соединим ломаной линией.

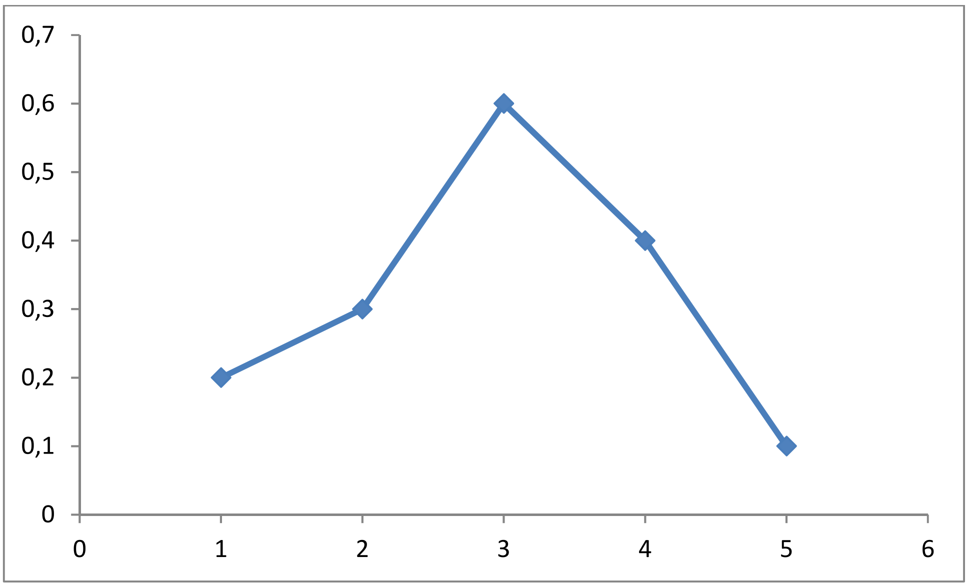


Рис. 12.1. Многоугольник распределения

Определение **12.7**. **Функция распределения** случайной величины X – это вероятность того, что случайная величина принимает значение, меньшее какого-либо фиксированного x. Обозначается

$$F(x) = P\{X<x\}. \qquad (12.1)$$

Для дискретной случайной величины функция распределения вычисляется по формуле $F(x)=\sum\limits_{x_i<x} p_i$, где суммирование ведется по всем $x_i<x$. В аналитической форме функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le x_1 \\ p_1, x_1 < x \le x_2 \\ p_1+p_2, x_2 < x \le x_3 \\ \dots\dots\dots \\ 1, x > x_n \end{cases}$$

***Пример* 12.1.** Монета подбрасывается 2 раза. Случайная величина X – число появлений герба. Для случайной величины X построить ряд, многоугольник и функцию распределения и ее график.

Решение.

Ряд распределения:

x_i	0	1	2
p_i	1/4	2/4	1/4

Графическое изображение ряда распределения:

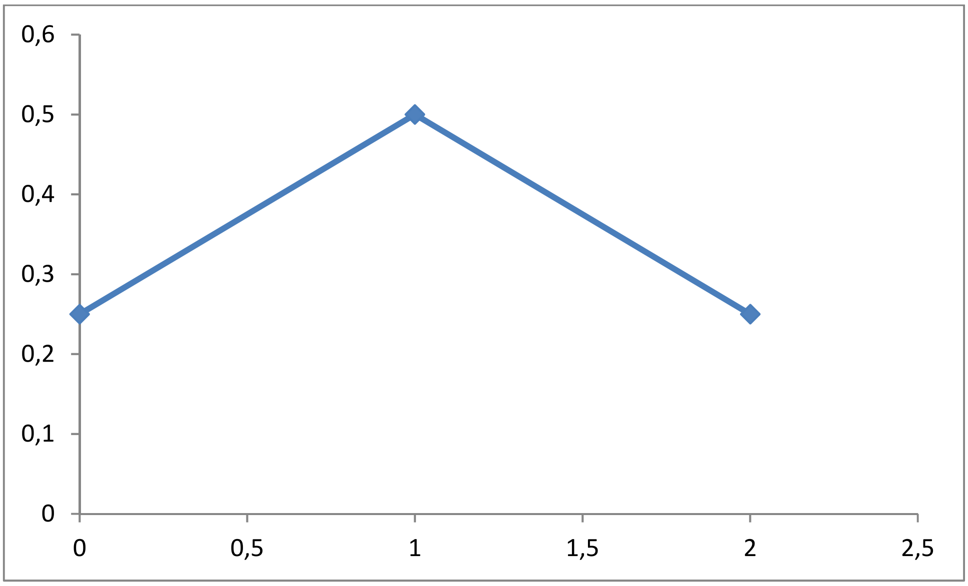


Рис. 12.2. Многоугольник распределения

Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x \le 0 \\ \frac{1}{4},\ 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4},\ 1 < x \le 2 \\ 1,\ \ x > 2 \end{cases}$$

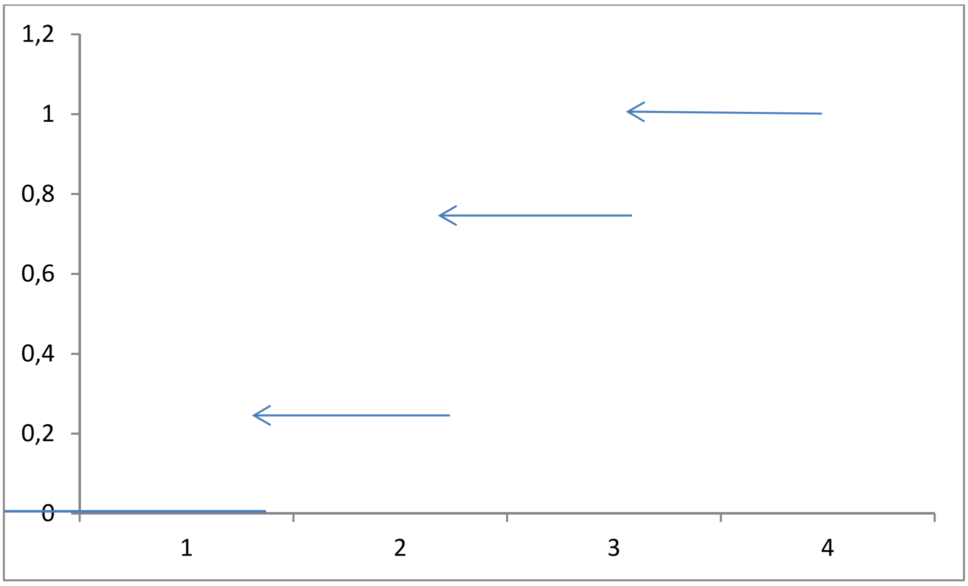


Рис. 12.3. График функции распределения

12.3. Функция распределения и функция плотности вероятности непрерывной случайной величины

Пусть X – непрерывная случайная величина и ее функция распределения $F\{x) = P\{X < x\}$ также непрерывна или кусочно-непрерывна и удовлетворяет следующим свойствам:

1) $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $\forall x_1 < x_2 \;\; F(x_1) < F(x_2)$

2) При $\dfrac{x \to -\infty, F(x) \to 0}{x \to +\infty, F(x) \to 1}$, т.е. $0 < F(x) < 1$.

3) $P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a)$

4) $F(x)$ - непрерывна слева.

Функция распределения не дает полного представления о распределении вероятности в малой окрестности точки x. Более эффективной в этом смысле является функция плотности вероятности. Дадим значению x приращение Δx и найдем вероятность попадания величины X в интервал $(x, x + \Delta x)$ $P\{x < X < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x)$.

В предположении, что $F(x)$ – непрерывна и дифференцируема, найдем предел отношения этой вероятности к приращению Δx, если $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Обозначим $F'(x) = f(x)$. Функция $f(x)$ характеризует плотность вероятности, с которой распределяются значения случайной величины в окрестности точки x. Эта функция называется **функцией плотности вероятности** непрерывной случайной величины.

Свойства функции плотности вероятности:

1) $f(x) \ge 0$, так как $f(x) = F'(x)$, а $F(x)$ – неубывающая функция;

2) $P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 -$ условие нормировки массы вероятностей для непрерывных случайных величин;

4) $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x).$

***Пример* 12.2**. Случайная величина X распределена по закону с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} C\left(1 - \frac{x}{4}\right), 0 < x \le 4, \\ 0, \qquad x \le 0, x > 4. \end{cases}$$

Найти:

1) Значение параметра C,
2) Функцию распределения $F(x)$,
3) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$,
4) $P\{1 < X < 3\}$.

Решение.

1) Для определения параметра C воспользуемся свойством 3) функции плотности вероятности: $\int_0^4 C\left(1 - \frac{x}{4}\right)dx = 1,$ откуда $C = \frac{1}{2}.$ Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right), 0 < x \le 4, \\ 0, \qquad x \le 0, x > 4. \end{cases}$$

2) Для нахождения функции распределения воспользуемся свойством 4.

Если $x \le 0,$ то $F(x) = 0.$

Если $0 < x \le 4,$ то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}.$

Если $x > 4,$ то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^4 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)dx + \int_4^x 0dx = 1.$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}, 0 < x \le 4, \\ 1, \quad x > 4. \end{cases}$$

3)

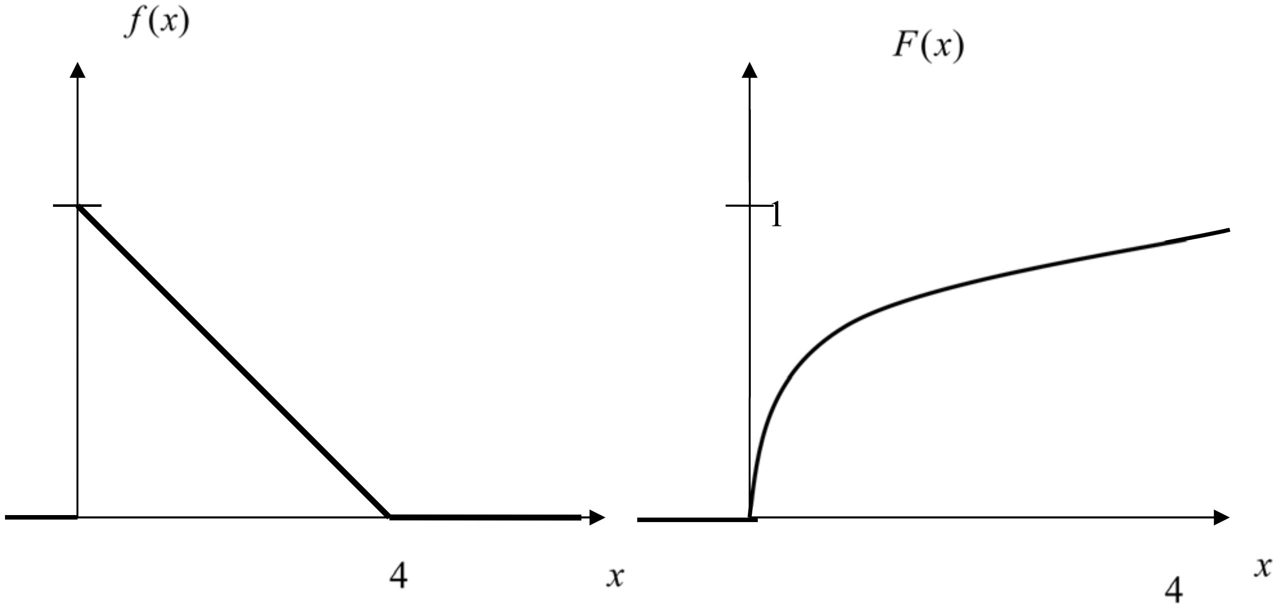


Рис.12.4. Графики $f(x)$ и $F(x)$

4) $P\{1 < X < 3\} = F(3) - F(1) = \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{16}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}.$

12.4. Числовые характеристики случайных величин

Функция распределения дает полную, хотя и труднообозримую информацию о законе распределения случайной величины. Однако часто бывает достаточно знать одну или несколько числовых характеристик случайной величины, которые давали бы менее полное, но более наглядное представление. При этом иногда достаточно знать некоторое среднее число, вокруг которого группируются значения случайной величины (центр группирования распределения), и ту или иную характеристику вариации значений случайной величины (степень рассеивания значений). Так, например, при изучении распределения заработной платы интересуются прежде всего средней заработной платой и характеристикой ее рассеивания. Эти характеристики иногда полезно дополнить характеристиками формы распределения вероятностей.

1. Меры положения

Допустим, что предстоит выбрать один из трех способов обработки древесины, причем отходы древесины при использовании каждого из способов – случайные величины. Надо выбрать такой способ, чтобы отходы в среднем были минимальными. Таким образом, желательно иметь некоторую характеристику положения, дающую возможность сравнивать случайные величины. Такие характеристики называются мерами положения или характеристиками центра группирования распределения вероятностей случайных величин. Имеется несколько способов определения центра группирования. Основной и наиболее употребительной характеристикой является математическое ожидание MX случайной величины X или ее среднее значение.

Определение **12.8. Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.

Пусть случайная величина X задана рядом распределения

x_i	x_1	x_2	……………..	x_n
p_i	p_1	p_2	……………..	p_n

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Пример **12.3**. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения

x_i	3	5	6
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. $MX = 3\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}6 + 6\cdot 0{,}3 = 5{,}1$

Пример **12.4.** Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Пусть X – число очков на верхней грани 1-й кости.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$MX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

Y – число очков на верхней грани 2-й кости.

y_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1 /6	1/6	1/6

$$MY = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$M(X+Y) = MX + MY = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 - \text{средняя сумма.}$$

Для непрерывных случайных величин при определении математического ожидания используется тот же подход, что и для дискретных, только суммирование заменяется интегрированием. Если непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности вероятности $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$MX = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Если $x \in (-\infty, +\infty)$, то математическое ожидание будет существовать, если будет существовать интеграл

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

***Пример* 12.5**. Для случайной величины из задачи 12.2 найти математическое ожидание.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right), 0 < x \le 4 \\ 0, x \le 0, x > 4 \end{cases}$$

Решение.

$$MX = \int_0^4 x \cdot f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x\left(1 - \frac{x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)_0^4 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине $MC=C$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания $M(CX) = C\,MX$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий $M(XY) = MX \cdot MY$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин $M(X + Y) = MX + MY$.

Кроме математического ожидания к мерам положения относятся среднее геометрическое, среднее гармоническое, мода, медиана и квантили распределения.

***Определение* 12.9. Медиана** x_{med} исследуемой случайной величины X определяется как средневероятное значение, т.е. такое значение, которое обладает свойством: вероятность того, что случайная величина примет значение больше x_{med} равна вероятности того, что случайная величина примет значение меньше x_{med}.

Для непрерывных случайных величин $P\{X < x_{med}\} = P\{X > x_{med}\} = 0,5$.

Для дискретных случайных величин медиану можно определить как любое число между двумя соседними возможными значениями x_i и x_{i+1} такими, что $F(x_i) < 0,5$, но $F(x_{i+1}) \ge 0,5$.

***Определение* 12.10. Модальное значение (мода)** x_{mod} случайной величины X определяется как наиболее вероятное значение.

В дискретном случае моде соответствует такое возможное значение x_{mod} случайной величины, вероятность реализации которого принимает свое наибольшее значение, т.е. $P\{X = x_{mod}\} = \max P\{X = x_i\}$.

Для непрерывных случайных величин значению моды соответствует максимальное значение функции плотности вероятности $f(x_{mod}) = \max f(x)$.

Мода может быть не единственной. Для одномодальных распределений моду можно рассматривать как одну из возможных характеристик центра группирования. Если распределение вероятностей случайной величины X симметрично относительно некоторой прямой $x = a$ и одномодально, то среднее, медиана и мода совпадают между собой $MX = x_{\mathrm{mod}} = x_{med}$. Для асимметричных распределений это условие не выполняется.

***Определение* 12.11. Квантилем уровня q** (q-квантилем) непрерывной случайной величины X , обладающей непрерывной функцией распределения $F(x)$, называется такое возможное значение U_q этой случайной величины, для которого $P\{X < U_q\} = F(U_q) = q$. Чем больше заданное значение q $(0 < q < 1)$, тем больше будет и соответствующая величина квантиля U_q . Частным случаем квантиля уровня 0,5 является медиана. Часто вместо понятия квантиля используют понятие процентной точки.

Определение.* 12.12.** Под ***100q% - й точкой случайной величины X понимается такое ее возможное значение W_q , для которого

$P\{X \geq W_q\} = 1 - P\{X < W_q\} = 1 - F(W_q) = q$.

Из определения квантилей и процентных точек следует $U_q = W_{1-q}$.

2. Меры разброса

***Определение 12.13.* Дисперсией** (рассеянием) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Такой способ вычисления дисперсии, основанный на определении, достаточно громоздкий. Поэтому распишем формулу

$$DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2 \cdot X \cdot MX + (MX)^2) =$$
$$= MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Если X – дискретная случайная величина, то для вычисления дисперсии можно использовать формулу

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i - (MX)^2.$$

***Пример* 12.6**. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана законом распределения

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $MX = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5$.

$MX^2 = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}6 + 5^2 \cdot 0{,}3 = 13{,}3$,

$DX = MX^2 - (MX)^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05$.

Если X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, то дисперсия определяется по формуле

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2.$$

***Пример* 12.7.** Для случайной величины из задачи 12.2 найти дисперсию.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right), 0 < x \le 4 \\ 0, x \le 0, x > 4 \end{cases}$$

Решение. $DX = \int_0^4 x^2 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32}\right)\Bigg|_0^4 - \frac{16}{9} = \frac{8}{9}.$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины равна 0, $DC = 0$, С – константа.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии в квадрате, $D(CX) = C^2DX$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин, $D(X + Y) = DX + DY$.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин, $D(X - Y) = DX + DY$.

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания кроме дисперсии используют среднее квадратическое отклонение.

***Определение* 12.14. Средним квадратическим отклонением** случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma X = \sqrt{DX}.$$

Так как дисперсия имеет размерность равную квадрату размерности случайной величины, то размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью случайной величины.

Кроме дисперсии и среднего квадратического отклонения используют **коэффициент вариации:**

$$V = \frac{\sqrt{DX}}{MX} \cdot 100\% = \frac{\sigma X}{MX} \cdot 100\%$$

Коэффициент вариации характеризует относительную степень разброса значений случайной величины в сравнении со средним, выраженную в %.

***Пример* 12.8.** В условиях примера 10.7 найти закон (ряд) распределения случайной величины X – {число успешно сданных зачетов в сессию}, записать функцию распределения, построить ее график и многоугольник распределения. Вычислить моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Решение. X – {число успешно сданных зачетов в сессию} = 0, 1, 2, 3. Чтобы построить ряд распределения, найдем вероятности:

$$p_1 = P(X = 0) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}028.$$

$$p_2 = P(X = 1) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{C}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{A}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) = 0{,}306$$

$$p_3 = P(X=2) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\overline{C}) + P(A)\cdot P(C)\cdot P(\overline{B}) + P(C)\cdot P(B)\cdot P(\overline{A}) =$$
$$= 0{,}378 + 0{,}108 + 0{,}018 = 0{,}504$$
$$p_4 = P(X=3) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = 0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 = 0{,}162.$$

Проверка: 0,028+0,306+0,504+0,162=1. верно.

Ряд распределения имеет вид:

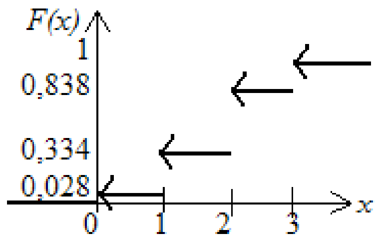
X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,028	0,306	0,504	0,162

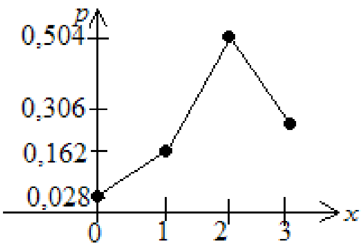
Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ 0{,}028,\ 0 < x \le 1, \\ 0{,}028 + 0{,}306 = 0{,}334,\ 1 < x \\ 0{,}334 + 0{,}504 = 0{,}838,\ 2 < x \\ 0{,}838 + 0{,}162 = 1,\ x > 3. \end{cases}$$

График $F(x)$:



Многоугольник распределения:



$MX = \sum x_i p_i = 0\cdot 0{,}028 + 1\cdot 0{,}306 + 2\cdot 0{,}504 + 3\cdot 0{,}162 = 1{,}8$ – среднее число полученных зачетов равно 1,8.

$x_{\text{mod}} = 2$ (потому что максимальная вероятность равна 0,504). Наиболее вероятное число сданных зачетов равно 2.

$x_{med} = 2$ (потому что $F(x) = 0{,}5$ при x = 2).

Дисперсия:

$$DX = \sum x_i^2 p_i - (MX)^2 = 0^2\cdot 0{,}028 + 1^2\cdot 0{,}306 + 2^2\cdot 0{,}504 + 3^2\cdot 0{,}162 - (1{,}8)^2 = 0{,}54.$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{0{,}54} = 0{,}735$.

Коэффициент вариации: $V = \dfrac{\sigma}{MX}\cdot 100\% = \dfrac{0{,}735}{1{,}8}\cdot 100\% = 40{,}82\%$. Абсолютное отклонение от среднего равно ±0,735 зачетов или 40,82%.

3. Меры формы

Моменты случайных величин

***Определение* 12.15.** Выражение $M(X — a)^n$ называется **моментом** n – го порядка случайной величины X относительно начала моментов a. Назначая разные начала моментов, можно получить разные последовательности моментов.

Для $a = 0$ получаем **начальный момент** n– го порядка $m_n = MX^n$. Если n=1, то получим начальный момент 1-го порядка, который равен математическому ожиданию $m_1 = MX$. Если n=2, то начальный момент 2-го порядка $m_2 = MX^2$, он используется для вычисления дисперсии $DX = MX^2 - (MX)^2 = m_2 - (m_1)^2$.

Если a=MX получаем **центральный момент** n– го порядка $\mu_n = M(X - MX)^n$. Если n=1, то получим. центральный момент 1-го порядка, $\mu_1 = M(X - MX) = 0$. Если $n = 2$, то центральный момент 2-го порядка $\mu_2 = M(X - MX) = DX$.

Центральные моменты можно выражать через начальные моменты, например, $\mu_2 = m_2 - (m_1)^2$.

В теории вероятностей и ее приложениях используют две числовые характеристики случайной величины, основанные на центральных моментах 3 и 4-го порядков соответственно – коэффициент асимметрии A_s и эксцесс E_k. Коэффициент асимметрии и эксцесс дают представление о форме плотности распределения или многоугольника распределения.

Определение 12.16. **Коэффициент асимметрии** A_s случайной величины X определяется как отношение 3-го центрального момента к кубу стандартного отклонения

$$A_s = \frac{\mu_3}{(\sigma X)^3}.$$

Для случайных величин, закон распределения которых симметричен относительно математического ожидания, асимметрия равна 0, так как $\mu_3 = 0$. Если распределение вероятностей несимметрично, причем более пологая часть распределения расположена справа от центра группирования, то $A_s > 0$, в противном случае $A_s < 0$.

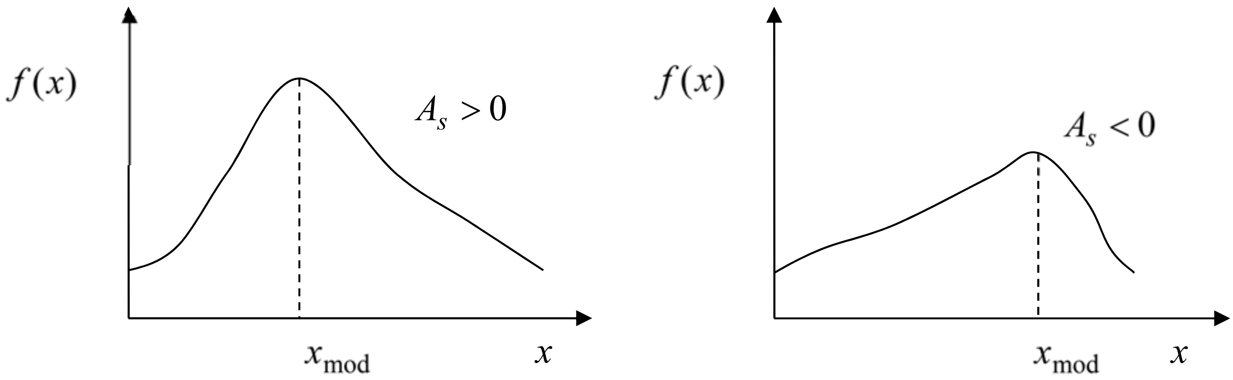


Рис. 12.4. Иллюстрация графиков,
имеющих лево- и правостороннюю асимметрию

В качестве характеристики островершинности или плосковершинности распределения используют **эксцесс,** который вычисляется по формуле

$$E_k = \frac{\mu_4}{(\sigma X)^4} - 3.$$

Асимметрия и эксцесс являются безразмерными величинами.

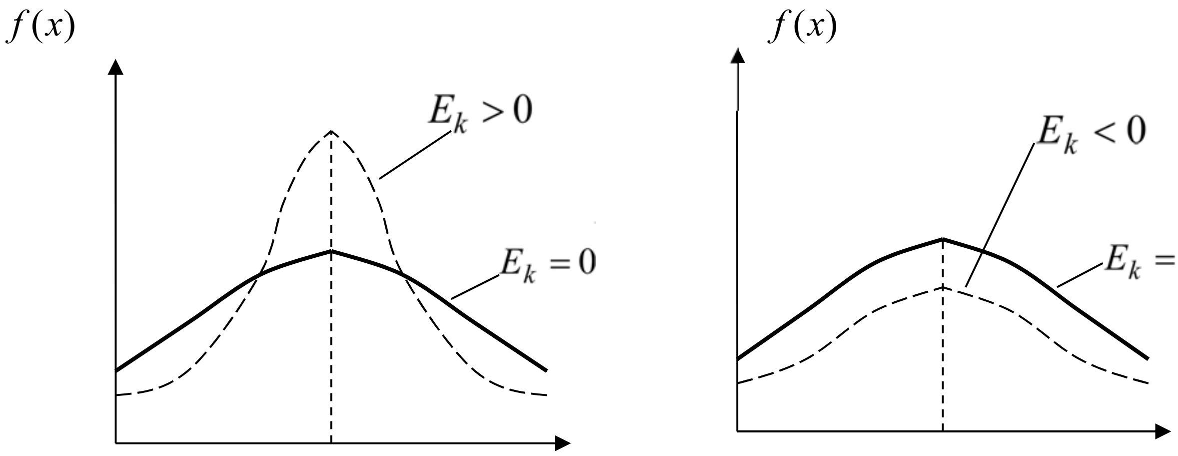


Рис. 12.5. Иллюстрация остро- и плосковершинности кривой распределения

Контрольные вопросы

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	1	2	4	6
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Тогда вероятность $P\{1 < X \le 4\}$ равна …

1) 0,5;
2) 0,8;
3) 0,7;
4) 0,1.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	–2	4	7
p_i	0,1	0,5	0,4

Тогда ее математическое ожидание равно …

1) 4,6;
2) 5,0;
3) 3,0;
4) 4,9

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{3x^2}{125} & \text{при } 0 < x \le 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P\{1 < X < 4\}$ равна …

1) $\dfrac{63}{125}$;
2) $\dfrac{3}{5}$;
3) $\dfrac{13}{25}$;
4) $\dfrac{9}{125}$.

4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при}\, x\le 0, \\ \dfrac{x}{7} \ \text{при}\ 0<x\le 7, \\ 1 \quad \text{при}\ x>7. \end{cases}$$

Тогда ее дисперсия равна …

1) $\dfrac{49}{12}$;

2) $\dfrac{7}{12}$;

3) $\dfrac{7}{2}$;

4) $\dfrac{12}{49}$.

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при}\ x\le 0, \\ \dfrac{3x^2}{64} \ \text{при}\ 0<x\le 4, \\ 0 \quad \text{при}\ x>4. \end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание равно …

1) 3;
2) 2;
3) 1;
4) 0.

13. Основные законы распределений случайных величин

1. Биномиальное распределение

***Определение* 13.1.** Дискретная случайная величина X называется распределенной по **биномиальному закону**, если ее спектр состоит из конечного числа целых неотрицательных значений $0,1,2,3,\ldots,n$, а распределение вероятностей вдоль спектра определяется по формуле Бернулли

$$P\{X=m\}=P_n(m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m=0,1,2,\ldots,n \qquad (13.1)$$

Практически, величина, распределенная по биномиальному закону, есть число появлений некоторого события А в n последовательных независимых испытаниях, когда $P(A) = p, \quad P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Числовые характеристики: $MX = np$, $DX = npq$.

Тот факт, что случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами n, p будем обозначать $X \sim B(n, p)$.

Биномиальный закон распределения широко используется в теории и практике статистического контроля качества продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и других областях

***Пример* 13.1.** Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов, найти MX, DX.

Решение. Случайная величина $X -$ число отказавших элементов,
$n = 3, p = 0{,}1, q = 0{,}9$.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

$$p_1 = P\{X = 0\} = C_3^0\, 0{,}1^0 0{,}9^3 = 0{,}729,$$
$$p_2 = P\{X = 1\} = C_3^1\, 0{,}1^1 0{,}9^2 = 0{,}243,$$
$$p_3 = P\{X = 2\} = C_3^2\, 0{,}1^2 0{,}9^1 = 0{,}027,$$
$$p_4 = P\{X = 3\} = C_3^3\, 0{,}1^3 0{,}9^0 = 0{,}001.$$

Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 1$. $MX = np = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3, \quad DX = npq = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}27.$

2. Распределение Пуассона

Если в условиях биномиальной схемы число испытаний n велико $(n \geq 30)$, а вероятность появления события А в одном испытании мала $(p \leq 0{,}1)$, то вместо формулы Бернулли используют формулу Пуассона:

$$C_n^m p^m q^{n-m} \underset{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}}{\approx} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{13.2}$$

где $\lambda = n \cdot p -$ параметр распределения.

***Определение* 13.2**. Дискретная случайная величина X распределена по **закону Пуассона** с параметром $\lambda \quad X \sim \prod(\lambda)$, если ее спектр $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$, а распределение вероятностей вдоль спектра определяется по формуле

$$P\{X = m\} = P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},\ m = 0, 1, \ldots. \tag{13.3}$$

Числовые характеристики: $MX = \lambda$, $DX = \lambda$.

Таким образом, дисперсия и математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона равны и совпадают с параметром распределения λ. Вероятности спектральных значений для различных m и λ содержатся в специальных таблицах.

По закону Пуассона распределены, например, число рождения четверней, число сбоев на автоматической линии, число отказов сложной системы, число требований на обслуживание и др.

Пример **13.2**. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено:

1) ровно 3 изделия;
2) более 3 изделий;
3) хотя бы одно изделие.

Решение. X – число изделий, повреждённых в пути $X \sim \prod(\lambda)$

$n = 500, \quad p = 0{,}002, \quad \lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

1) $P\{X = 3\} = P_{500}(3) \approx \dfrac{\lambda^3}{3!} e^{-1} = 0{,}0613$;

2) $P\{X > 3\} = \sum\limits_{m=4}^{500} P(m) = 1 - \sum\limits_{m=0}^{3} P(m) = 0{,}019$;

3) $P\{X \geq 1\} = 1 - P(0) = 0{,}632$.

3. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Определение **13.3.** Непрерывная случайная величина X распределена по **нормальному закону** с параметрами a и σ $(X \sim N(a, \sigma))$, если ее функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty, \qquad (13.4)$$

функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad -\infty < x < +\infty. \qquad (13.5)$$

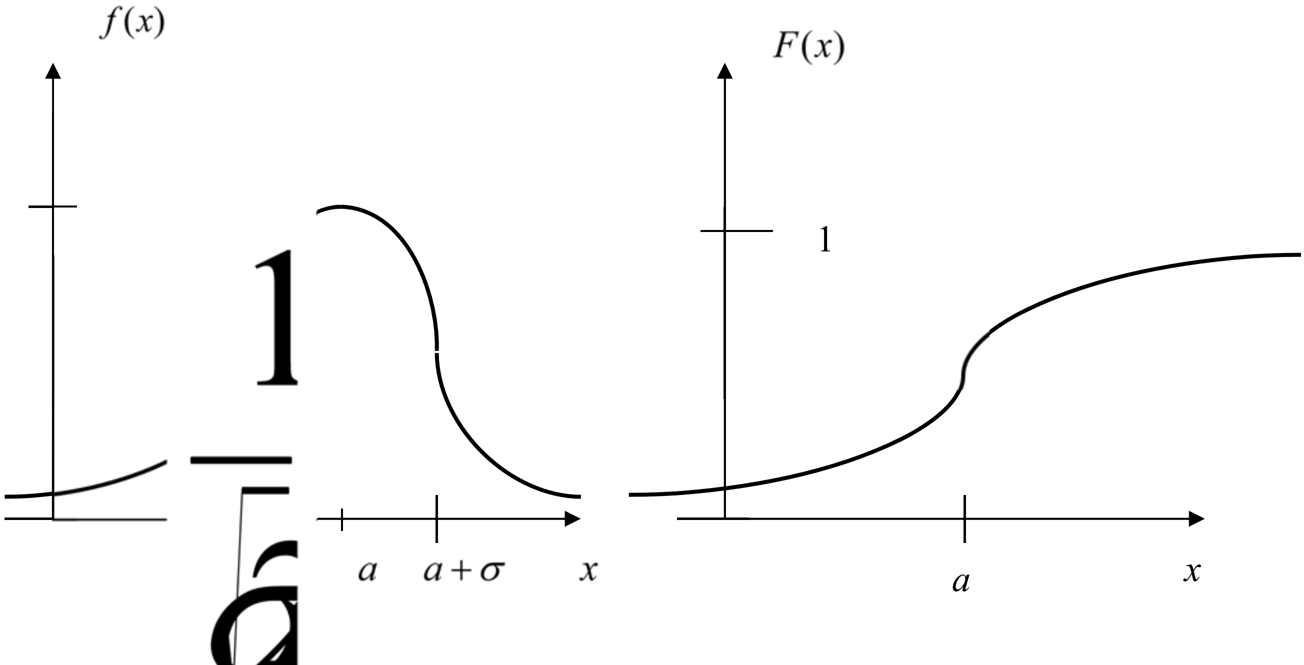


Рис. 13.1. Графики $f(x)$ и $F(x)$

Числовые характеристики: $MX = a,\ DX = \sigma^2$.

Для $X \sim N(a,\sigma)$ $MX = x_{\text{mod}} = x_{med}$ так как кривая распределения симметрична относительно математического ожидания.

При практическом использовании нормального закона требуется определить вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал от α до β:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi^*\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad -\infty < x < +\infty, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad -\infty < x < +\infty$$

значения этих функций содержатся в специальных таблицах.

Пользуясь этой формулой для $X \sim N(a,\sigma)$, можно найти следующие вероятности: $P\{a - \sigma < X < a + \sigma\} \approx 0{,}683$, $P\{a - 2\sigma < X < a + 2\sigma\} \approx 0{,}955$, $P\{a - 3\sigma < X < a + 3\sigma\} \approx 0{,}997 \Rightarrow$ практическое правило «трех σ», которое позволяет во многих приближенных вычислениях считать, что реализация какого-либо числового значения нормальной случайной величины в пределах $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ будет практически достоверным событием, а за его пределами практически невозможным.

Свойства функций $\Phi(x)$ и $\Phi^*(x)$ сведем в таблицу

Таблица 13.1

$\Phi^*(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \quad -\infty<x<+\infty$ 1. $\Phi^*(-\infty)=0$ 2. $\Phi^*(+\infty)=1$ 3. $\Phi^*(0)=0{,}5$ 4. $\Phi^*(-x)=1-\Phi^*(x)$ 5. $\Phi^*(x)=0{,}5+\Phi(x)$	$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \quad -\infty<x<+\infty$ 1. $\Phi(-\infty)=-0{,}5$ 2. $\Phi(+\infty)=0{,}5$ 3. $\Phi(0)=0$ 4. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Его главная особенность состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма типичных условиях.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории и практике вероятностно-статистических методов, с его помощью получен ряд важных распределений, которые используются для построения теоретико-вероятностных моделей реальных социально-экономических явлений.

Пример **13.3.** Полагая, что рост мужчины определенной возрастной группы, есть случайная величина $X \sim N(173{,}6)$, требуется найти:

1) $f(x), F(x)$;

2) долю костюмов 4 роста (176 - 182 см) и 3 роста (170 – 176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы;

3) квантиль уровня 0,7: $x_{0,7}$;

4) сформулировать правило «3σ».

Решение. $X \sim N(173{,}6)$, $a=173$ см., $\sigma=6$ см.

1) $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}6}e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}, -\infty<x<+\infty,$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}6}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}dx, \quad -\infty<x<+\infty;$$

2)

$$P\{176<X<182\}=\Phi\left(\frac{182-173}{6}\right)-\Phi\left(\frac{176-173}{6}\right)=\Phi(1{,}5)-\Phi(0{,}5)=0{,}2418$$

$$P\{170<X<176\}=\Phi\left(\frac{176-173}{6}\right)-\Phi\left(\frac{170-173}{6}\right)=\Phi(0{,}5)+\Phi(0{,}5)=0{,}3829$$

Таким образом, доля костюмов 4 роста должна составлять 24%, а 3 роста – 38% в общем объеме производства;

3) $P\{X < x_{0,7}\} = 0,7 \Rightarrow$

$$P\{0 < X < x_{0,7}\} = \Phi\left(\frac{x_{0,7} - 173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 173}{6}\right) = 0,7$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,7} - 173}{6}\right) + \Phi(28,83) = 0,7$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,7} - 173}{6}\right) = 0,7 - 0,5 = 0,2 \Rightarrow \frac{x_{0,7} - 173}{6} = 0,53 \Rightarrow x_{0,7} = 176,18 \quad \text{см., т.е.}$$

70% мужчин данной возрастной группы имеют рост меньше 176 см.

4) Практически по правилу «3σ» достоверным является тот факт, что рост мужчины заключен в пределах (173-18,173+18)=(155,191).

4. Равномерное распределение на отрезке

***Определение* 13.4.** Непрерывная случайная величина X называется **равномерно распределенной на отрезке** $[a,b]$, если ее функция плотности вероятности постоянна на этом отрезке и рана 0 за его пределами, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} C, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}, \quad C - const.$$

Найдем чему равно С, так как

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_a^b Cdx = 1, C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{x\big|_a^b} = \frac{1}{b-a}.$$

Функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x \le b \\ 1, x > b \end{cases}.$

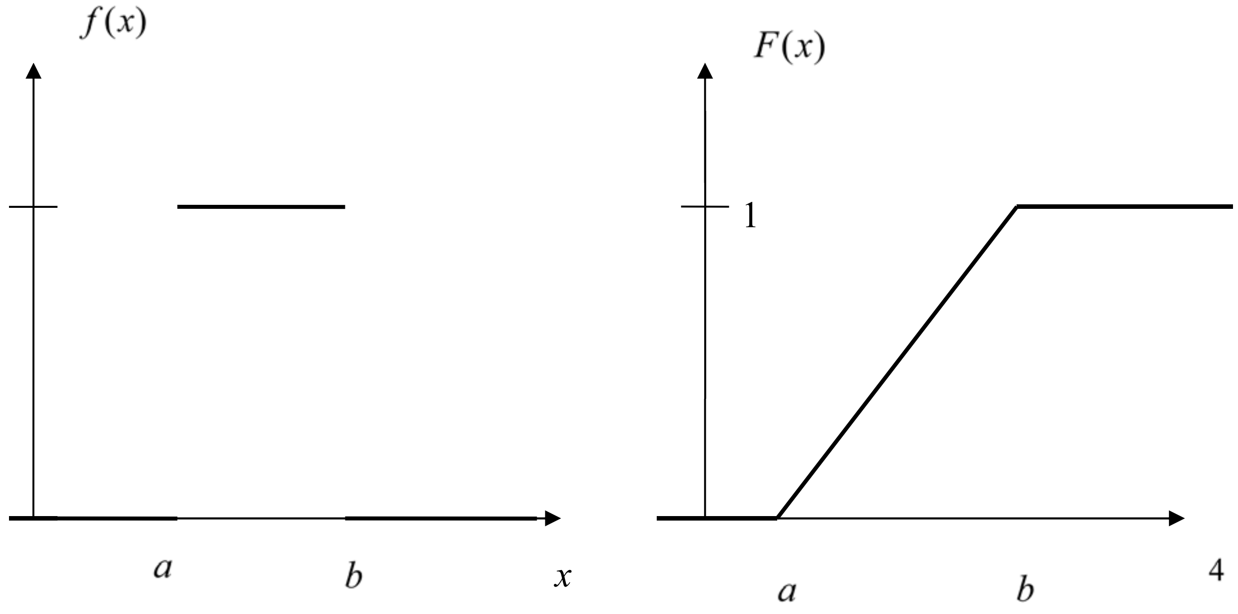


Рис. 13.2. Графики $f(x)$ и $F(x)$

Основные числовые характеристики: $MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Тот факт, что случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a,b]$ будем обозначать $X \sim U(a,b)$.

Примеры равномерно распределенных случайных величин: анализ ошибок округления при проведении числовых расчетов, время ожидания обслуживания, время ожидания пассажиром прибытия поезда.

***Пример* 13.4.** Два человека ездят на работу, у первого дорога отнимает 20-25 мин., у второго 20-30 мин. Любое время на дорогу в этих пределах равновероятно. Определить вероятность того, что дорога на работу занимает у каждого от 20,5 до 22,8 мин. и среднее время на дорогу.

Решение. Случайные величины X_1, X_2 – время, затраченное на дорогу первым и вторым, распределены равномерно на отрезках $[20,25]$ и $[20,30]$.

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, x \in [20,25] \\ 0, x \notin [20,25] \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, x \in [20,30] \\ 0, x \notin [20,30] \end{cases}.$$

$$P\{20,5 < X_1 < 22,8\} = \frac{1}{5}\int_{20,5}^{22,8} dx = \frac{1}{5}(22,8 - 20,5) = 0,46,$$

$$P\{20,5 < X_2 < 22,8\} = \frac{1}{10}\int_{20,5}^{22,8} dx = \frac{1}{10}(22,8 - 20,5) = 0,23.$$

Среднее время на дорогу $MX_1 = \dfrac{20+25}{2} = 22,5$ мин., $MX_2 = \dfrac{20+30}{2} = 25$ мин.

14. Системы двух дискретных случайных величин

При совместном рассмотрении нескольких случайных величин приходим к системе случайных величин или многомерной случайной величине $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – случайному вектору. На многомерные случайные величины можно распространить почти без изменений основные определения одномерной случайной величины.

Случайные величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, входящие в систему, могут быть как дискретными, так и непрерывными. Если требуется охарактеризовать погоду в данном регионе за определенное время суток, то можно использовать систему непрерывных случайных величин: X_1 – температура, X_2 – влажность, X_3 – давление, X_4 – скорость ветра и т.п. Успеваемость студента в конце семестра характеризуется системой дискретных случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – оценками по различным дисциплинам.

14.1. Закон распределения системы двух случайных величин

Рассмотрим систему двух дискретных случайных величин (X, Y), $\quad n = 2.$ Наиболее полным описанием такой величины является закон ее распределения. Для системы дискретных случайных величин (X, Y), имеющих конечное множество возможных значений, закон распределения можно задать в форме таблицы, содержащей всевозможные сочетания значений каждой из одномерных случайных величин, входящих в систему, и соответствующие им вероятности (табл.14.1). Такая таблица называется таблицей распределения системы двух случайных величин с конечным числом возможных значений.

Таблица 14.1

x_i \ y_j	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_j	$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}	p_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}	p_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}	p_n
$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$	p_1	$\ldots$	p_j	$\ldots$	p_m	1

Здесь вероятности $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$ Так как события $(X = x_i, Y = y_j), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},$ образуют полную группу несовместных событий, то $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Итоговые столбец или строка таблицы 1 представляют распределения одномерных составляющих

$X:$	x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
	p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$Y:$	y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_m
	p_j	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Здесь $P(X = x_i) = p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, $P(Y = y_j) = p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$, при этом $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1.$

Случайные величины способны влиять друг на друга и наряду с безусловными законами их распределений часто возникает необходимость рассматривать условные законы распределений.

Пусть имеется система двух случайных величин (X,Y). Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая величина, входящая в систему, приняла определенное значение или значение из определенной области, называется условным законом распределения.

Условный закон распределения можно задать в различной форме в зависимости от типа случайных величин.

Пусть $X,Y-$дискретные случайные величины, принимающие значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_m$ соответственно. Условным распределением составляющей X при условии, что $Y = y_j$ называется совокупностью условных вероятностей $p(x_1 / y_j), p(x_2 / y_j), \dots, p(x_n / y_j),$ где

$$p(x_i / y_j) = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}, i = \overline{1,n}.$$

***Пример* 14.1.** Качество продукции характеризуется двумя случайными величинами X и Y. Закон распределения системы (X,Y) представлен таблицей 13.2.

Таблица 14.2

$x_i \backslash y_j$	2	5	8	p_i
0,4	0,15	0,3	0,35	0,8
0,8	0,05	0,12	0,03	0,2
p_j	0,2	0,42	0,38	1

Найти: 1) безусловные законы распределения величин X и Y;

2) условный закон распределения величины X при условии, что величина Y приняла значение равное 5;

3) условный закон распределения величины Y при условии, что величина X приняла значение равное 0,4.

Решение. 1) Безусловные законы распределений составляющих X и Y получим в виде рядов распределений

$X:$	x_i	0,4	0,8
	p_i	0,8	0,2

$Y:$	y_i	2	5	8
	p_j	0,2	0,42	0,38

Вероятности p_i и p_j находятся в последнем столбце и в последней строке таблицы 13.2 соответственно.

2) Найдем условные вероятности

$$P(X = x_1 / Y = 5) = \frac{P(X = 0{,}4; Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{0{,}3}{0{,}42} = \frac{5}{7};$$

$$P(X = x_2 / Y = 5) = \frac{P(X = 0{,}8; Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{0{,}12}{0{,}42} = \frac{2}{7}.$$

Получаем следующее условное распределение X при условии, что $Y = 5$:

x_i	0,4	0,8
$p(x_i / y_2)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

3) Аналогично, условные вероятности

$$P(Y = y_1 / X = 0{,}4) = \frac{P(Y = 2; X = 0{,}4)}{P(X = 0{,}4)} = \frac{0{,}15}{0{,}8} = \frac{3}{16};$$

$$P(Y = y_2 / X = 0{,}4) = \frac{P(Y = 5; X = 0{,}4)}{P(X = 0{,}4)} = \frac{0{,}3}{0{,}8} = \frac{3}{8};$$

$$P(Y = y_3 / X = 0{,}4) = \frac{P(Y = 8; X = 0{,}4)}{P(X = 0{,}4)} = \frac{0{,}35}{0{,}8} = \frac{7}{16}.$$

Условное распределение Y при условии, что X приняла значение равное 0,4, запишется в виде ряда

y_j	2	5	8
$p(y_j / x_1)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$

14.2. Числовые характеристики системы двух случайных величин

При изучении двумерных случайных величин рассматриваются числовые характеристики одномерных составляющих X и Y − математические ожидания и дисперсии, которые могут быть найдены по формулам

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad MY = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}, \tag{14.1}$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^{\,2} p_{ij} - (m_x)^2, \quad DY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^{\,2} p_{ij} - (m_y)^2.$$

Наряду с ними рассматриваются также числовые характеристики условных распределений: условные математические ожидания $M(X / Y = y)$, $M(Y / X = x)$ и условные дисперсии $D(X / Y = y)$, $D(Y / X = x)$. Такие характеристики находятся по обычным формулам математического ожидания и дисперсии, в которых вместо вероятностей событий используются условные вероятности. Так, например, условное математическое ожидание величины X при условии, что величина Y приняла значение y_j, определится как $M(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i / y_j),\ j = \overline{1,m}.$

В приложениях условное математическое ожидание называют также регрессией X на Y (либо Y на X).

Важнейшими характеристиками двумерной случайной величины являются также ковариация и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом (ковариацией) двух случайных величин X и Y называется число $\operatorname{cov}(X,Y)$, равное математическому ожиданию произведения отклонений случайных величин X и Y от своих математических ожиданий:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M[(X - MX)\cdot(Y - MY)] = M(X\cdot Y) - MX\cdot MY.$$

Коэффициент корреляции обозначается r_{XY} и вычисляется по формуле

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}.$$

Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если их коэффициент корреляции равен 0, т.е. $r_{XY} = 0$. Из независимости случайных величин следует их некоррелированность, в то время как некоррелированные величины могут быть зависимы.

***Пример* 14.2.** Для случайных величин X и Y из задачи 14.1 найти:

1) Математические ожидания и дисперсии одномерных составляющих X и Y;

2) Условное математическое ожидание $M(X/Y=5)$ и дисперсию $D(Y/X=0{,}4)$;

3) Ковариацию и коэффициент корреляции.

Решение.

1) Найдем математические ожидания и дисперсии по формулам (14.1):

$M(X) = 0{,}4\cdot 0{,}15 + 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}4\cdot 0{,}35 + 0{,}8\cdot 0{,}05 + 0{,}8\cdot 0{,}12 + 0{,}8\cdot 0{,}03 = 0{,}48;$

$M(Y) = 2\cdot 0{,}15 + 2\cdot 0{,}05 + 5\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}12 + 8\cdot 0{,}35 + 8\cdot 0{,}03 = 5{,}54;$

$D(X) = (0{,}4)^2\cdot 0{,}15 + (0{,}4)^2\cdot 0{,}3 + (0{,}4)^2\cdot 0{,}35 + (0{,}8)^2\cdot 0{,}05 + (0{,}8)^2\cdot 0{,}12 +$

$+ (0{,}8)^2\cdot 0{,}03 - (0{,}48)^2 = 0{,}0256;$

$D(Y) = 2^2\cdot 0{,}15 + 2^2\cdot 0{,}05 + 5^2\cdot 0{,}3 + 5^2\cdot 0{,}12 + 8^2\cdot 0{,}35 + 8^2\cdot 0{,}03 - (5{,}54)^2 = 4{,}9284.$

2) Условное математическое ожидание

$M(X/Y=5) = 0{,}4\cdot\frac{5}{7} + 0{,}8\cdot\frac{2}{7} \approx 0{,}514.$

Для определения условной дисперсии $D(Y/X=0{,}4)$ найдем сначала условное математическое ожидание $M(Y/X=0{,}4) = 2\cdot\frac{3}{16} + 5\cdot\frac{3}{8} + 8\cdot\frac{7}{16} \approx 5{,}75.$

Тогда $D(Y/X=0{,}4) = 2^2\cdot\frac{3}{16} + 5^2\cdot\frac{3}{8} + 8^2\cdot\frac{7}{16} - (5{,}75)^2 = 5{,}0625.$

3) Ковариация величин X и Y может быть найдена по формуле

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY\ ,$$

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = 0{,}4(2 \cdot 0{,}15 + 5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}35) +$$

$$+ 0{,}8(2 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}12 + 8 \cdot 0{,}03) = 2{,}592;$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 2{,}592 - 0{,}48 \cdot 5{,}54 = -0{,}0672.$$

Коэффициент корреляции равен

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{-0{,}0672}{\sqrt{0{,}0256} \cdot \sqrt{4{,}9284}} = \frac{-0{,}0672}{0{,}16 \cdot 2{,}22} \approx -0{,}189.$$

Таким образом, связь между величинами X и Y слабая, так как $|r_{XY}| = 0{,}189$. Знак этого коэффициента характеризует направление связи, т.е. если значения одной величины будут возрастать, то значения другой имеют тенденцию в среднем убывать.

Раздел 4. Основы математической статистики

Математическая статистика – наука, которая изучает методы получения, описания и обработки опытных данных с целью изучения закономерностей массовых случайных явлений. Задачи математической статистики в некотором смысле обратны задачам теории вероятностей. В теории вероятностей мы исходим из того, что теоретико-вероятностная модель процесса задана и мы производим расчет возможного реального течения этого процесса. В математической статистике наоборот требуется по статистическим данным подобрать подходящую теоретико-вероятностную модель изучаемого явления или процесса.

Все задачи математической статистики касаются вопросов обработки опытных данных, но в зависимости от характера измеряемой величины и цели исследования могут принимать ту или иную форму. Можно выделить три основных типа задач:

1. Первичная статистическая обработка данных или описательная (дескриптивная) статистика. На этом этапе данные необходимо представить в виде рядов, графиков, вычислить сводные характеристики выборки и получить предварительные сведения о законе распределения изучаемой случайной величины.
2. Статистическое оценивание неизвестных параметров. Предполагается, что изучаемая случайная величина имеет закон распределения определенного вида. Однако, параметры, определяющие этот закон неизвестны, требуется по результатам наблюдений найти приближенные значения этих параметров – оценки параметров либо в виде одного числа, либо в виде интервала.
3. Статистическая проверка гипотез. На разных стадиях исследования возникает необходимость в формулировании и проверке некоторых предположений – гипотез, касающихся либо значений неизвестных параметров, либо вида предполагаемого закона распределения, либо наличия связей (корреляции) между величинами. Процедура обоснования сопоставления выдвинутой гипотезы с имеющимися данными осуществляется с помощью специально сконструированного критерия и называется статистической проверкой гипотез.

15. Дескриптивная (описательная) статистика

Рассмотрим способы представления исходных данных (выборки заданного объема) в компактном виде (в виде рядов, графиков), определение числовых характеристик выборки, а также обсудим эмпирические аналоги теоретических распределений и выводы, которые можно сделать по элементам описательной статистики.

15.1. Эмпирические распределения и их графические представления

Выборка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ объема n имеющихся в нашем распоряжении значений исследуемой случайной величины X является той исходной информацией, на основании которой строятся выводы о свойствах изучаемой генеральной совокупности в целом и, в частности, составляется представление о функции и ряде распределения или плотности анализируемого закона распределения вероятностей.

Упорядоченная по величине последовательность выборочных значений $x_1^{(n)} \le x_2^{(n)} \le \ldots \le x_n^{(n)}$ называется **вариационным рядом**. Среди членов вариационного ряда могут быть совпадающие между собой значения. Если через $n_1, n_2, \ldots, n_r$ обозначить общее число повторений всех несовпадающих значений выборки, то получим два ряда чисел:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_r
n_j	n_1	n_2	$\ldots$	n_r

$$\sum_{j=1}^{r} n_j = n. \qquad (15.1)$$

Первый ряд содержит различные выборочные значения, расположенный в порядке возрастания. Числа второго ряда показывают количество повторений каждого из этих значений в выборке и называются частотами. Ряд (15.1) называется точечным вариационным рядом, что соответствует дискретной вариации признака, или эмпирическим распределением признака по частотам.

От распределения частот (т. е. ряда (15.1)) можно перейти к распределению **относительных частот** $w_i = \dfrac{n_i}{n}, \sum_{i=1}^{r} w_i = 1,$ заданных в виде доли w_i или в виде процента $w_i \cdot 100\%$ $(\sum_{t=1}^{r} w_i \cdot 100\% = 100\%)$:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_r
w_i	w_1	w_2	$\ldots$	w_r

$$, \qquad \sum_{i=1}^{r} w_i = 1. \qquad (15.2)$$

Вариационный ряд (15.2), построенный по относительным частотам, является статистической аппроксимацией ряда распределения вероятностей случайной величины X.

Если объем выборки n велик ($n > 50$) и при этом мы имеем дело с непрерывной случайной величиной (или дискретной, число возможный значений которой достаточно велико), то часто удобнее, с точки зрения дальнейшей статистической обработки результатов наблюдений, перейти к интервальному вариационному ряду или группированной выборке. Этот переход осуществляется следующим образом:

1) отмечаются наименьше $x_{\min}$ и наибольшее $x_{\max}$ значения в выборке;

2) весь диапазон $[x_{\min}; x_{\max}]$ разбивается на k равных интервалов группирования (количество интервалов не должно быть меньше 8–10 и больше 20–25), выбор числа интервалов существенно зависит от объема выборки; для примерной ориентации в выборе k можно пользоваться приближенной формулой $k \approx 1 + \log_2 n$ либо $k \approx 1 + 3{,}32 \ln n$;

3) определяется величина шага или ширина интервала группирования h, для чего вариационный размах $R = x_{\max} - x_{\min}$ делится на число интервалов k:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k};$$

4) находятся крайние точки каждого из интервалов: $C_0 = x_{\min}$, $C_1 = C_0 + h,\ C_2 = C_1 + h, ..., C_k = C_{k-1} + h,$ а также их середины: $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$;

5) подсчитываются числа выборочных данных, попавших в каждый из интервалов: $n_1, n_2, ..., n_k$ (очевидно, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$); выборочные данные, попавшие на границы интервалов, либо равномерно распределяются по двум соседним интервалам, либо относятся только к какому-либо из них, например, к левому.

Таким образом, следуя этой методике, от ряда (15.1) или (15.2) можно перейти к **интервальному вариационному ряду**

$C_i - C_{i+1}$	$C_0 - C_1$	$C_1 - C_2$	$\dots$	$C_{k-1} - C_k$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n. \qquad (15.3)$$

От интервального ряда (15.3) можно вновь перейти к точечному, если в качестве значения случайной величины, соответствующего i-му интервалу, взять его середину $x_i^* = (C_i + C_{i+1})/2$. Получим ряд

x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\dots$	x_k^*
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n. \qquad (15.4)$$

В некоторых задачах от ряда (15.1) или (15.4) целесообразно перейти к ряду, содержащему кумулятивные или накопленные частоты m_i.

Накопленная (интегральная или кумулятивная) частота m_i значения x_i, получается суммированием частот значений, предшествующих данному, с частотой n_i, т.е. $m_i = n_1 + n_2 + ... + n_i$. Накопленная частота крайнего правого значения (или максимального элемента выборки) равна объему выборки n. Несмотря на видимую несхожесть, ряды (15.1) – (15.4) отражают одно и то же фактическое распределение признака.

***Замечание* 15.1**. Предложенную процедуру построения вариационных рядов ни в коем случае не следует считать единственно возможной. Количество интервалов, их длины, а также расположение интервалов относительно выборочного материала могут варьироваться по усмотрению исследователя в зависимости от решаемых задач.

Для наглядного представления вариационные ряды изображают в виде графиков. Наиболее распространенными способами представления эмпирических данных является гистограмма, полигон частот или относительных частот и полигон накопленных частот, или кумулятивная кривая – кумулята.

Гистограмма состоит из последовательности примыкающих друг к другу прямоугольников (рис. 15.1). Ширина этих прямоугольников равна ширине интервалов группирования h и откладывается по оси абсцисс, а высота откладывается по оси ординат и пропорциональна частоте n_i или относительной частоте w_i. В первом случае имеем гистограмму частот с высотами прямоугольников, равными n_i / h, и общей площадью, равной объему выборки *n*. Во втором – гистограмму относительных частот с высотами прямоугольников $n_i / n \cdot h$, и общей площадью, равной 1. Ступенчатая ломаная, ограничивающая в этом случае сверху построенную фигуру, является статистической аппроксимацией кривой распределения или графика функции плотности вероятности $f(x)$ исследуемой случайной величины *X*. Эту же аппроксимацию мы получим, если через середины верхних оснований прямоугольников проведем плавную линию (пунктир).

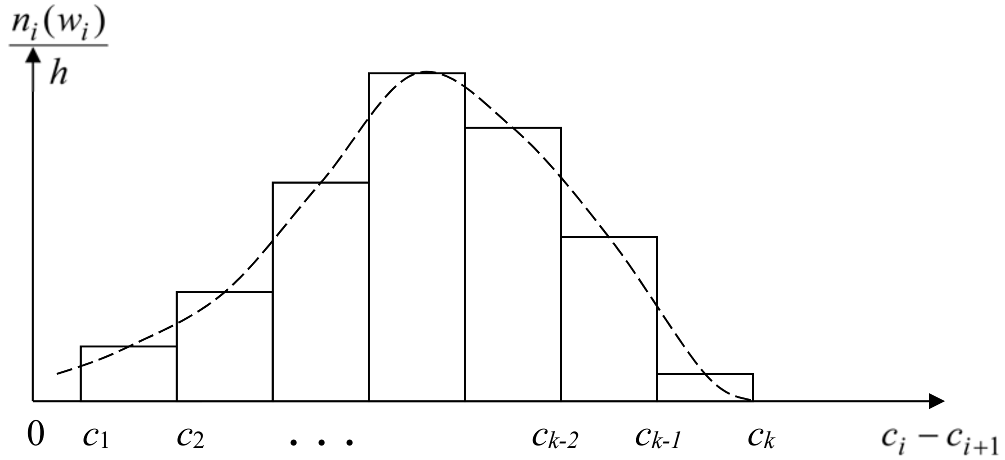


Рис.15.1 Гистограмма (относительных) частот

Полигон частот или относительных частот представляет собой многоугольник с вершинами в точках (x_i, n_i) или (x_i, w_i) (рис. 15.2).

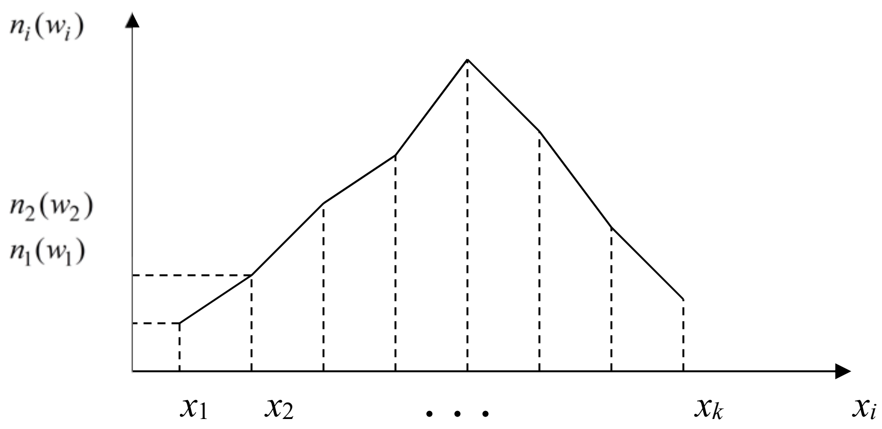


Рис. 15.1. Полигон (относительных) частот

При изображении полигона частот или относительных частот интервального вариационного ряда вершины многоугольника расположены в точках с абсциссами, соответствующими срединным значениям интервалов x_i^*, и ординатами, равными частоте n_i или относительной частоте w_i.

Полигон накопленных частот (**кумулята**) получается изображением в прямоугольной системе координат вариационного ряда с накопленными частотами.

При построении кумуляты дискретного признака на ось абсцисс наносятся значения признака – элементы выборки x_i. Ординатами служат вертикальные отрезки – накопленные частоты m_i (рис. 15.3).

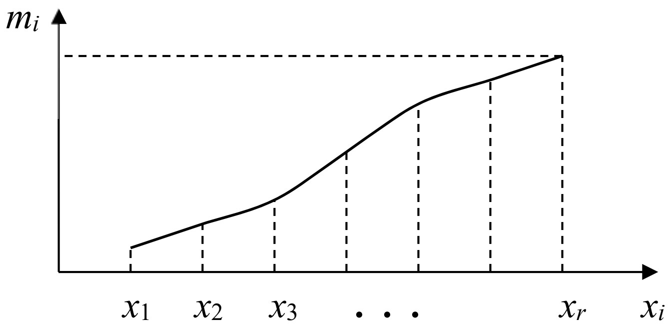


Рис. 15.3. Кумулята

15.2. Эмпирическая или статистическая функция распределения

Пусть n_x – число элементов выборки $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, меньших *x*. **Статистической** или **эмпирической** функцией распределения называется функция

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Иначе, статистическая функция распределения $F^*(x)$ есть относительная частота события $\{X < x\}$ в серии из *n* независимых измерений случайной величины *X*. На основании закона больших чисел статистическая функция распределения сходится по вероятности к теоретической функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности, когда объем n неограниченно возрастает. Следовательно, $F^*(x)$ является статистической аппроксимацией функции распределения $F(x) = P\{X < x\}$, ее приближенным значением и обладает следующими свойствами:

1) значения $F^*(x)$ принадлежат отрезку [0,1];
2) $F^*(x) -$ неубывающая функция;
3) если $x_{\max}$ – наибольший элемент выборки, а $x_{\min}$ – наименьший, то

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_{\min}, \\ 1, & x > x_{\max}; \end{cases}$$

4) $F^*(x)$ непрерывна слева.

Для выборки, представленной рядом (15.1), эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ запишется как

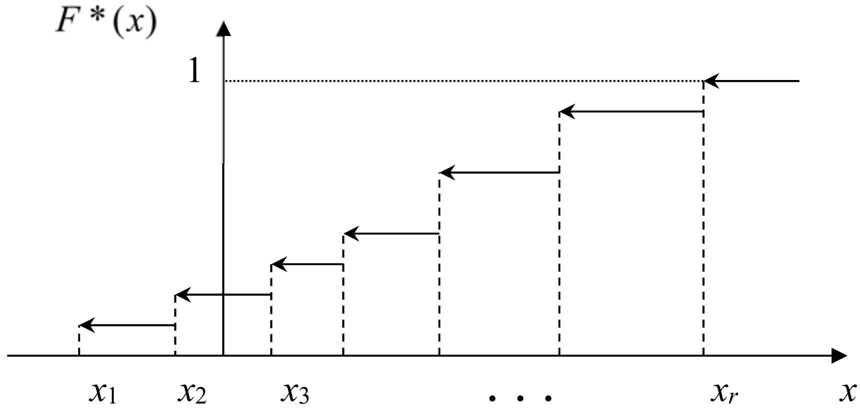


Рис. 15.4. График эмпирической функции распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2 \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ 1, & x > x_r \end{cases}.$$

График эмпирической функции распределения представляет собой ступенчатую линию со скачками в точках, определяемых элементами выборки (рис. 15.4).

Проиллюстрируем построение вариационных рядов, их графиков, а также эмпирической функции распределения на следующем примере.

***Пример* 15.1.** Для изучения производительности труда X (тыс. руб.) обследовано $n = 100$ предприятий данной отрасли. Результаты наблюдений представлены ниже.

13,9	15,3	15,0	15,4	14,8	14,9	16,0	14,7	15,8	16,4
15,4	13,6	15,4	13,5	15,2	15,0	16,6	15,8	13,8	15,1
16,6	16,9	14,7	13,6	16,0	16,0	16,3	14,1	14,8	13,9
14,7	15,2	15,3	17,1	14,1	14,3	15,6	16,4	16,1	15,9
15,6	15,4	14,9	14,6	15,6	15,2	13,0	13,7	14,2	15,2
16,6	13,6	14,4	15,7	14,8	15,3	15,1	15,0	15,8	16,8
13,6	15,0	15,0	12,5	13,9	13,9	16,4	15,4	15,0	15,1
14,8	15,9	14,5	14,4	15,4	13,8	15,4	15,8	13,4	14,8
15,5	17,3	14,5	13,2	15,4	16,0	14,8	13,8	14,1	15,8
13,8	14,2	14,6	15,6	14,6	16,7	15,5	14,4	14,7	14,1

1. По данным выборки построить точечный вариационный ряд, распределив значения x_i по частотам n_i (ряд 1).

2. От ряда 1 перейти к интервальному ряду (ряд 2).

3. От ряда 2 перейти к точечному ряду, распределив значения по частотам (ряд 3) и относительным частотам в виде доли и в виде процента (ряд 4).

4. Построить:

а) гистограмму относительных частот для ряда 2;

б) полигон частот для ряда 3;

в) кумулятивную кривую для ряда 3.

5. Найти эмпирическую функцию распределения случайной величины *X*, используя ряд 3, и построить ее график.

Решение.

1. Для того чтобы построить точечный вариационный ряд, необходимо расположить наблюдаемые значения x_i в порядке их возрастания и относительно каждого x_i указать частоту n_i, т.е. количество повторений x_i в выборке; при этом сумма всех частот равна объему выборки *n*.

Ряд 1:

x_i	12,5	13,0	13,2	13,4	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	14,1
n_i	1	1	1	1	2	3	1	4	4	4
x_i	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9	15,0	15,1
n_i	2	1	3	2	4	4	5	2	6	3
x_i	15,2	15,3	15,4	15,5	15,6	15,7	15,8	15,9	16,0	16,1
n_i	4	4	7	2	4	1	5	2	4	1
x_i	16,3	16,4	16,6	16,7	16,8	16,9	17,1	17,3		
n_i	1	3	3	1	1	1	1	1		

Здесь объем выборки $n = \sum n_i = 100$, а число различных значений r =38.

2. Так как объем выборки велик и число различных значений исследуемого случайного признака также велико, то целесообразно перейти от точечного ряда 1 к интервальному. Такой переход осуществляется по изложенной выше методике следующим образом:

а) отмечаются наименьшее $x_{\min} = 12{,}5$ и наибольшее $x_{\max} = 17{,}3$ значения в выборке;

б) весь обследованный диапазон [12,5;17,3] разбивается на число интервалов *k*, где $k \approx 1 + \log_2 n$. В нашем примере $n = 100$ и $k = 8$;

в) определяется величина шага или ширина интервала группирования h:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{17{,}3 - 12{,}5}{8} = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6;$$

г) отмечаются крайние точки каждого из интервалов C_i, C_{i+1} в порядке возрастания, а также подсчитываются числа выборочных данных, попавших в каждый из интервалов $n_1, n_2, \ldots, n_k$ здесь $n_1 + n_2 + \ldots + n_8 = 100$

Ряд 2:

$C_i - C_{i+1}$	12,5 – 13,1	13,1 – 13,7	13,7 – 14,3	14,3 – 14,9
n_i	2	8	15	20
$C_i - C_{i+1}$	14,9 – 15,5	15,5 – 16,1	16,1 – 16,7	16,7 – 17,3
n_i	26	17	8	4

3. Для того чтобы от интервального ряда 2 перейти вновь к точечному, необходимо отметить середины интервалов x_i^* и сопоставить им частоты n_i или относительные частоты w_i. Распределение производительности труда по частотам запишется в виде ряда 3, а распределение по относительным частотам в виде ряда 4:

Ряд 3:

x_i^*	12,8	13,4	14,0	14,6	15,2	15,8	16,4	17,0
n_i	2	8	15	20	26	17	8	4

$\sum n_i = 100$

Ряд 4:

x_i^*	12,8	13,4	14,0	14,6	15,2	15,8	16,4	17,0
w_i	0,02	0,08	0,15	0,20	0,26	0,17	0,08	0,04
$w_i \cdot 100$	2	8	15	20	26	17	8	4

$\sum w_i = 1$

$\sum w_i 100\% = 100\%$

Гистограмма относительных частот для ряда 2 изображена на рис. 15.5.

Для построения кумуляты представим ряд 3 по накопленным частотам m_i

x_i^*	12,8	13,4	14,0	14,6	15,2	15,8	16,4	17,0
m_i	2	10	25	45	71	88	96	100

Тогда кумулятой будет плавная кривая, изображенная на рис.15.7.

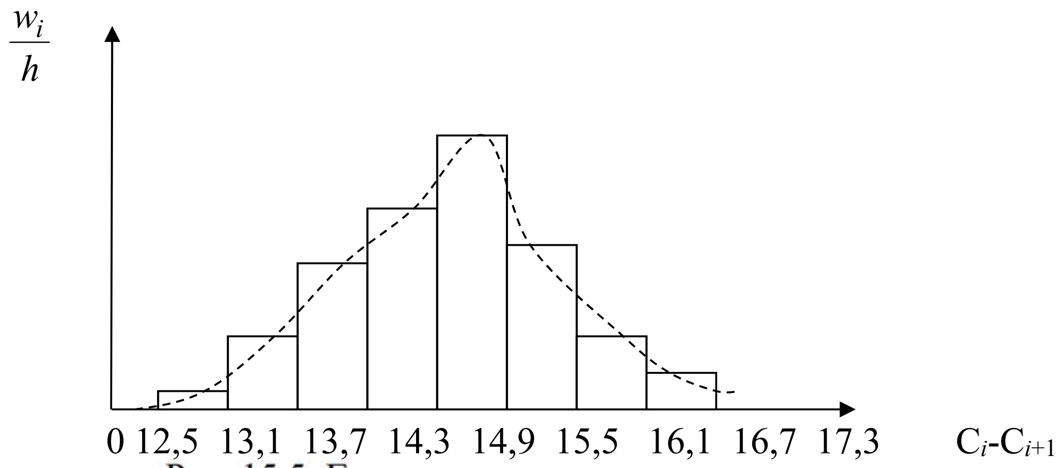


Рис. 15.5. Гистограмма относительных частот

Полигон частот показан на рис.15.6

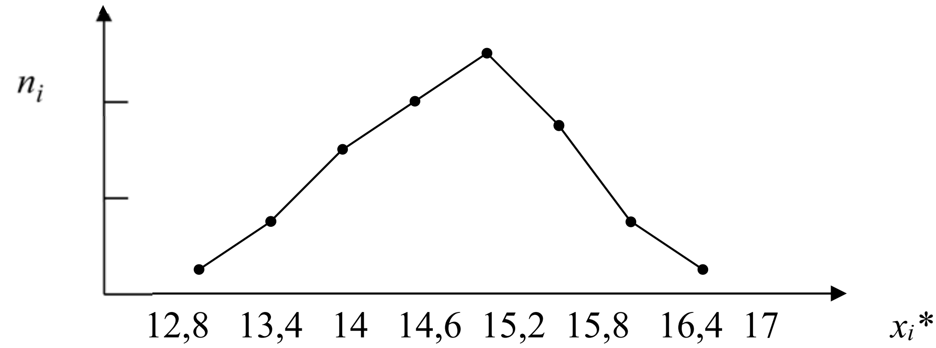


Рис. 15.6. Полигон частот

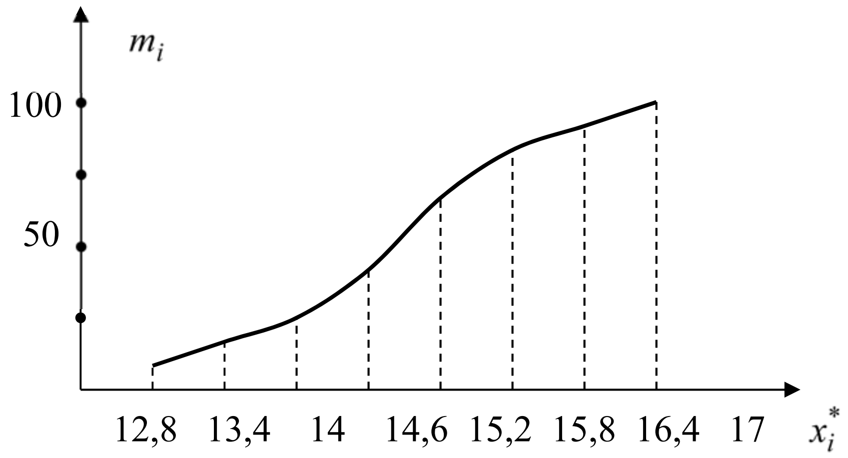


Рис. 15.7. Кумулята

5. Эмпирическая функция распределения для ряда 3 запишется так:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 12{,}8 \\ 0{,}02, & 12{,}8 < x \le 13{,}4 \\ 0{,}10, & 13{,}4 < x \le 14{,}0 \\ 0{,}25, & 14{,}0 < x \le 14{,}6 \\ 0{,}45, & 14{,}6 < x \le 15{,}2 \\ 0{,}71, & 15{,}2 < x \le 15{,}8 \\ 0{,}88, & 15{,}8 < x \le 16{,}4 \\ 0{,}96, & 16{,}4 < x \le 17{,}0 \\ 1, & x > 17{,}0 \end{cases}$$

Здесь, например, значение функции $F^*(x)$, равное 0,02, найдено как $\frac{2}{100}$, так как значение X<13,4, а именно $x_1 = 12{,}8$ наблюдалось 2 раза; значения X<14,0, а именно $x_1 = 12{,}8$ и $x_2 = 13{,}4$ наблюдались 2+8 = 10 раз, следовательно, $F^*(x)$=10/100 =0,10 при 13,4< x ≤14,0 и т. д.

График $F^*(x)$ изображен на рис. 15.8.

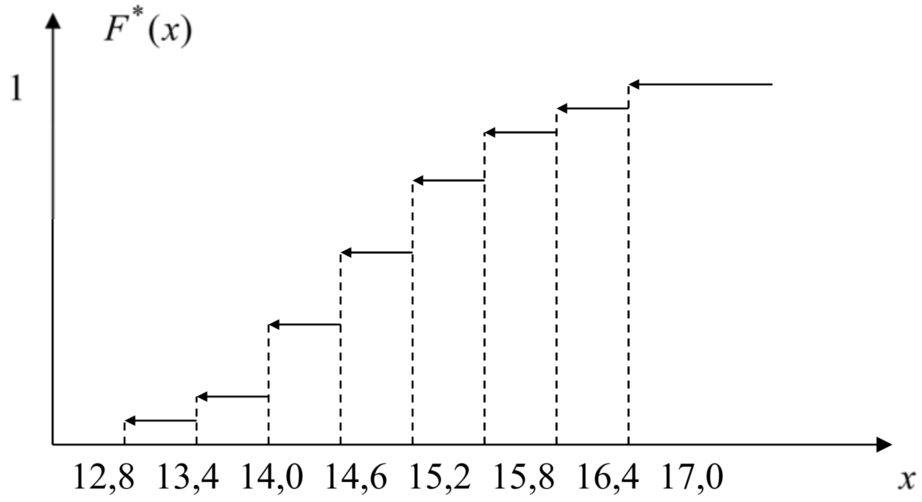


Рис. 15.8. График эмпирической функции распределения

15.3. Числовые характеристики эмпирических распределений

Исчерпывающие сведения об интересующем нас законе распределения вероятностей дают вариационные ряды, их графические представления, а также эмпирическая функция распределения. Однако нередко при практическом изучении генеральной совокупности этого бывает недостаточно, и требуется охарактеризовать имеющуюся совокупность значений некоторыми количественными показателями. К таким показателям или числовым характеристикам_выборки относятся меры положения, меры рассеяния и меры формы.

Характеристики или меры положения. Существует несколько характеристик, применяемых для описания характера расположения распределений: среднее (арифметическое, геометрическое и гармоническое), медиана, мода, а также выборочные квантили.

Арифметическое (или выборочное) среднее $\overline{x}$ (или $\overline{x}_в$) для не сгруппированной выборки $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ объема n определяется формулой

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (15.5)$$

В случае выборки, представляемой рядом вида (14.1), выборочное среднее равно:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} n_i x_i . \qquad (15.6)$$

Выборочное среднее представляет собой значение, относительно которого может быть «сбалансировано» все эмпирическое распределение (фактически, это абсцисса центра масс гистограммы). Эта характеристика является одной из наиболее употребительных статистических мер: многие средние показатели в экономике подсчитываются по формулам (15.5), (15.6).

Среднее геометрическое $\overline{x}_{геом}$ определяется как

$$\overline{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} ,$$

либо

$$\bar{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}} \ .$$

Геометрическое среднее находит применение при оценке темпов изменения величин, например, при расчетах индексов цен. Геометрическое среднее следует применять прежде всего тогда, когда среднее значение должно быть рассчитано из значений, заданных через некоторые равные промежутки времени; $\bar{x}_{геом}$ применяется, когда переменная меняется во времени с приблизительно постоянным соотношением между измерениями. К этому случаю относятся многообразные явления роста. Прирост населения во времени, изменение числа пациентов или эксплуатационные расходы – вот известные примеры подобного типа явлений.

Геометрическое среднее применяется также тогда, когда отдельные значения в выборке далеко отстоят от остальных значений; это меньше влияет на геометрическое среднее (чем на арифметическое среднее), так как оно дает более правильное представление о среднем.

Среднее гармоническое $\bar{x}_{гарм}$ задается соотношением

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

или

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{x_i}} .$$

Область применения гармонического среднего весьма ограничена. В экономике, в частности, пользуются иногда гармоническим средним при анализе средних норм времени, а также в некоторых видах индексных расчетов, когда суммируемый признак выражен обратной величиной данного признака, т.е. $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

Гармоническое среднее необходимо тогда, когда наблюдения, для которых мы хотим получить арифметическое среднее, заданы обратными значениями, когда эти наблюдения каким-либо образом уже содержат эту обратную зависимость.

Между тремя средними значениями существует следующее соотношение:

$$\bar{x}_{гарм} \le \bar{x}_{геом} \le \bar{x} .$$

Причем равенство справедливо при одинаковых выборочных значениях.

Медиана x_{med} исследуемого признака определяется как его средневероятное значение, т.е. такое значение, для которого

$$P\{X < x_{med}\} = P\{X > x_{med}\} = \frac{1}{2}.$$

При определении выборочного (приближенного) значения медианы имеющиеся в нашем распоряжении наблюдения $x_1, x_2, ..., x_n$ располагают в вариационный ряд и определяют в качестве x_{med} средний (т. е. $\frac{1}{2}(n+1)$-й) член этого ряда, если n нечетно, и любое значение между средними, т.е. $\frac{1}{2}n$ – м и $\left(\frac{1}{2}n+1\right)$ – м членами этого ряда, если n четно.

При исчислении медианы интервального вариационного ряда вначале находят интервал, содержащий медиану. Медианному интервалу соответствует первая из накопленных частот, превышающая половину объема выборки. Для нахождения медианы при постоянстве плотности внутри интервала, содержащего медиану, используют следующую формулу:

$$x_{med} = x_{med(\min)} + h\frac{n/2 - m_{med-1}}{n_{med}}, \qquad (15.7)$$

где $x_{med(\min)}$ – нижняя граница медианного интервала; h – интервальная разность; m_{med-1} – накопленная частота интервала, предшествующего медианному; n_{med} – частота медианного интервала.

Медиана может быть определена и графически по кумуляте. Для этого последнюю ординату, равную сумме всех частот, т.е. объему выборки n, делят пополам. Из полученной точки восстанавливают перпендикуляр до пересечения с кумулятой. Абсцисса точки пересечения и дает значение медианы (рис. 15.9).

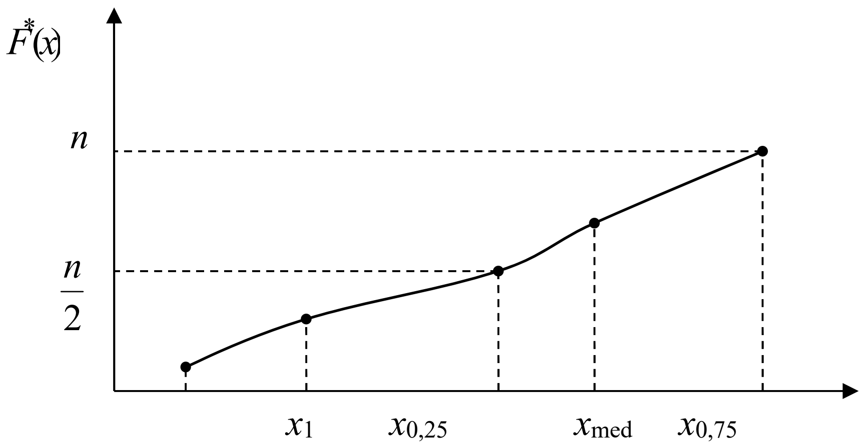


Рис. 15.9. Кумулята

Модальное значение (или просто *мода*) x_{mod} есть такое значение исследуемого признака, которое чаще всего встречается в данном вариационном ряду. Для дискретного ряда мода определяется по частотам и соответствует выборочному значению с наибольшей частотой. В случае интервального распределения с равными интервалами модальный интервал, т. е. содержащий моду, определяется по наибольшей частоте, а при неравных интервалах – по наибольшей плотности. Вычисление моды производится по формуле:

$$x_{\text{mod}} = x_{\text{mod(min)}} + h\frac{n_{\text{mod}} - n_{\text{mod}-1}}{2n_{\text{mod}} - n_{\text{mod}-1} - n_{\text{mod}+1}}, \qquad (15.8)$$

где $x_{\text{mod(min)}}$ – нижняя граница модального интервала; h – интервальная разность; n_{mod} – частота модального интервала; $n_{\text{mod}-1}$ – частота интервала, предшествующего модальному; $n_{\text{mod}+1}$ - частота интервала, следующего за модальным.

В случае симметричной плотности среднее значение $\bar{x}$, мода x_{mod} и медиана x_{med} совпадают между собой.

Выборочной квантилью порядка или уровня p называется абсцисса x_p точки, лежащей на кумулятивной кривой и имеющей ординату p (см. рис. 15.9). Порядок квантили p определяет долю общего числа наблюдений в выборке, результаты которых не превосходят x_p. Квантили порядка 0,25 и 0,75 называют соответственно нижним и верхним квартилями, медиана есть квантиль порядка 0,5, т. е. $x_{0,5} = x_{med}$. Нахождение квартилей осуществляется точно так же, как и определение медианы.

Характеристики или меры рассеяния. Средние величины, характеризующие вариационный ряд одним числом, не учитывают вариацию или разброс значений признака. Для измерения вариации применяется ряд способов.

Вариационный размах R, представляющий собой разность между наибольшим и наименьшим значениями в выборке:

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

применяется в качестве приблизительной оценки вариации. Особенно широко используется размах в ряде отраслей промышленности при статистическом изучении качества продукции.

Одной из наиболее часто используемых характеристик рассеяния данных является выборочное среднее квадратическое (стандартное) отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

дающее абсолютный разброс значений признака относительно среднего и определяемое таким образом для несгруппированных данных. Если данные сгруппированы, то

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_i(x_i - \bar{x})^2}.$$

Квадрат этой величины σ^2 называется выборочной дисперсией и обозначается D_B:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Выборочная дисперсия также может использоваться для оценки разброса значений исследуемого признака.

Для оценки относительной изменчивости признака используется коэффициент вариации

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}} \cdot 100\%,$$

который дает возможность охарактеризовать относительный разброс значений признака вокруг его среднего, выраженный в процентах.

Меры формы. Форма распределения исследуемой случайной величины характеризуется коэффициентами асимметрии и эксцесса, выборочные значения которых определяются формулами

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_B^3}, \qquad E_k = \frac{\mu_4}{\sigma_B^4} - 3,$$

где μ_3, μ_4 – центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков соответственно. Для несгруппированной выборки объема n центральный момент k-го порядка равен:

$$\mu_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, \quad k = 1,2,3,4,\ldots$$

Для нормального распределения коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю. Поэтому, если для изучаемого распределения эти коэффициенты имеют небольшие значения, то можно предположить близость эмпирического распределения к нормальному закону. Наоборот, большие значения этих характеристик указывают на значительное отклонение от нормального распределения.

Асимметрия служит для характеристики «скошенности» распределения. Если коэффициент асимметрии положительный, то более пологая часть кривой распределения расположена правее моды, если отрицательный – левее (рис.15. 10).

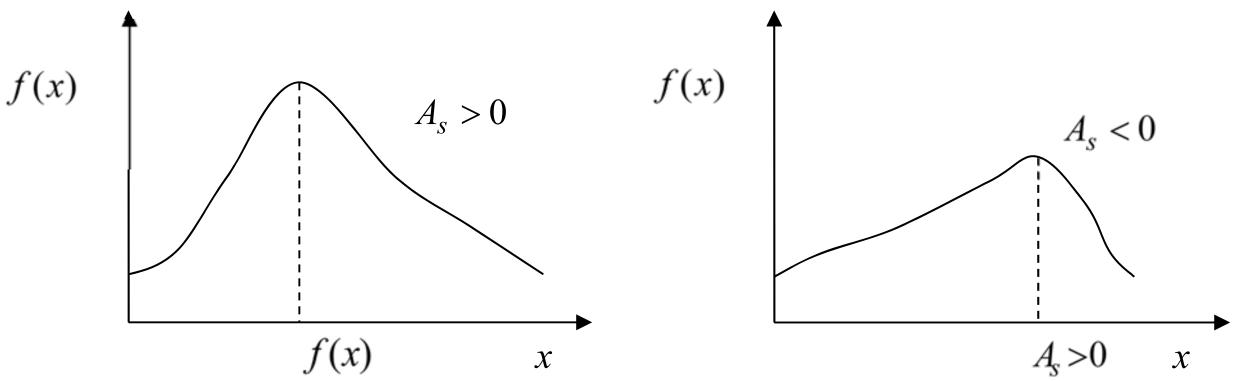


Рис. 15.10. Иллюстрация графиков, имеющих лево- и правостороннюю асимметрию

Для оценки «крутости», т. е. большего или меньшего подъема кривой эмпирического распределения по сравнению с нормальной кривой, используется коэффициент эксцесса. Если $E_k > 0$, то эмпирическая кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем кривая Гаусса; если $E_k < 0$, то сравниваемая кривая имеет более низкую и плоскую вершину (рис. 15.11).

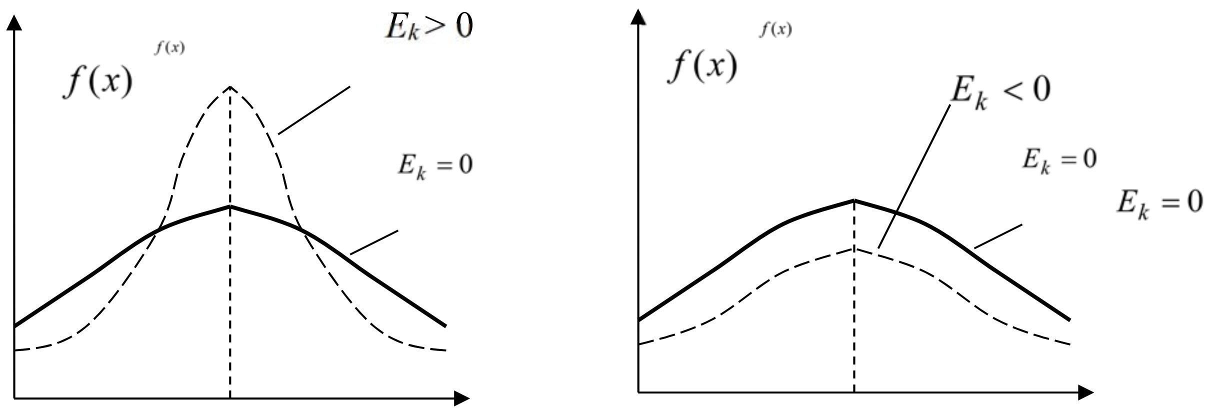


Рис. 15.11. Иллюстрация остро- и плосковершинности кривой распределения

***Пример* 15.2.** При изучении производительности труда *X* тыс. руб. по данным, представленным в задаче 15.1, определить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию D_B, выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B, коэффициент вариации *V*, моду x_{mod} и медиану x_{med} по точечному ряду 1 и интервальному ряду 2, а также коэффициенты асимметрии A_s и эксцесса E_k. Проанализировать результаты, полученные в итоге первичной статистической обработки данных, используя решения задач 15.1 и 15.2.

Решение. Для упрощения вычислений расчет характеристик выборки произведем по ряду 3. Для удобства вычислений составим вспомогательную таблицу (табл. 15.1).

Таблица 15.1

Вспомогательная таблица для расчета характеристик выборки по сгруппированным данным

k	x_i^*	n_i	$x_i^* n_i$	$n_i(x_i^* - \bar{x})$	$n_i(x_i^* - \bar{x})^2$	$n_i(x_i^* - \bar{x})^3$	$n_i(x_i^* - \bar{x})^4$	m_i
1	12,8	2	25,6	- 4,356	9,4874	- 20,6635	45,0051	2
2	13,4	8	107,2	- 12,624	19,9207	- 31,4348	49,6041	10
3	14,0	15	210,0	- 14,670	14,3473	- 14,0316	13,7229	25
4	14,6	20	292,0	- 7,560	2,8577	- 1,0802	0,4083	45
5	15,2	26	396,2	5,772	1,2814	0,2845	0,0632	71
6	15,8	17	268,6	13,974	11,4866	9,4420	7,7613	88
7	16,4	8	131,2	11,376	16,1767	23,0032	32,7106	96
8	17,0	4	68,0	8,088	16,3539	33,0677	66,8628	100
Итог	-	100	1497,8	0,0	91,9117	– 1,4127	216,1383	-

Пользуясь данными табл. 15.1 и формулой (15.6), найдем выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{8} n_i x_i^* = \frac{1497{,}8}{100} = 14{,}978.$$

Для проверки правильности вычисления $\bar{x}$ полезно убедиться в выполнении условия $\sum n_i(x_i^* - \bar{x}) = 0$.

По данным табл. 15.1 найдем выборочные:

- дисперсию

$$D_B = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{8} n_i(x_i^* - \bar{x})^2 = 0{,}9191;$$

- среднее квадратическое отклонение σ_B =0,9587;

- коэффициент вариации $V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}} \cdot 100\% = 6{,}4\%$;

- центральные моменты третьего и четвертого порядков:

$$\mu_3 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{8} n_i(x_i^* - \bar{x})^3 = -0{,}0141;$$

$$\mu_4 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{8} n_i(x_i^* - \bar{x})^4 = 2{,}1614;$$

- коэффициент асимметрии:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_B^3} = \frac{-0{,}0141}{0{,}8811} = -0{,}0160;$$

- коэффициент эксцесса:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma_B^4} - 3 = \frac{2{,}1614}{0{,}8447} - 3 = -0{,}4412.$$

Определим моду и медиану. Мода исследуемой случайной величины X для заданного эмпирического распределения в виде ряда 1 x_{mod} =15,4, так как частота этого значения наибольшая и равна 7. В случае интервального ряда 2 модальному интервалу соответствует наибольшая частота n_{mod}, равная 26. Следовательно,

$x_{\text{mod(min)}}$ =14,9; h =0,6; n_{mod} =26, $n_{\text{mod}-1}$ =20, $n_{\text{mod}+1}$ =17.

$$x_{\text{mod}} = 14{,}9 + 0{,}9\frac{26 - 20}{2 \cdot 26 - 20 - 17} = 15{,}14.$$

Медиану определим как средний член ряда по точеному распределению выборки. В нашем примере n =100, поэтому в качестве медианы берем любое значение между 50-м и 51-м членами ряда 1. Здесь x_{med} =15,0.

Медианному интервалу заданного эмпирического распределения в виде ряда 2 соответствует накопленная частота 71, отсюда $x_{med(\min)}$=14,9; h=0,6; m_{med-1} = 45; n_{med} =26. Используя формулу (15.7), получим

$$x_{med} = 14{,}9 + 0{,}6\frac{50-45}{26} = 15{,}0154 \approx 15{,}02.$$

Определим медиану графически по кумуляте, представленной на рис. 15.7. Для этого последнюю ординату, равную объему выборки n=100, поделим пополам. Восстановим перпендикуляр до пересечения с кумулятой. Абсцисса точки пересечения $x_{med} \approx 15$ и будет медианой.

Таким образом, средняя производительность труда изученной группы предприятий составила $\bar{x} = 14{,}978$ (тыс. руб.), абсолютный разброс значений показателя X равен σ=0,9587 (тыс. руб.), относительный разброс $V = 6{,}4\%$. Наибольшее число предприятий имеют производительность труда, равную 15,14 (тыс. руб.), а половина – более 15,02 (тыс. руб.)

Построенные вариационный ряды 1–3, их графические изображения (рис. 15.5-15.8) представляют данные в компактном виде. Кроме этого имеется возможность получить сведения о законе распределения вероятностей исследуемой случайной величины. Здесь внешний контур гистограммы (рис. 15.5), графики кумулятивной кривой (рис. 15.7) и эмпирической функции распределения (рис. 15.8) свидетельствуют о близости эмпирического распределения к нормальному закону. К этому же выводу можно прийти, сравнивая значения выборочного среднего, моды, медианы. Так как $\bar{x}$, x_{mod} и x_{med} незначительно отличаются друг от друга ($\bar{x} \approx x_{\mathrm{mod}} \approx x_{med} \approx 15{,}00$), есть основание предполагать, что теоретическое распределение симметрично относительно своего среднего значения, что является еще одним доводом в пользу выбора модели нормального закона. И, наконец, близость значений выборочных коэффициентов асимметрии A_s и эксцесса E_k к нулю также свидетельствует в пользу выбора нормального закона распределения для анализируемой случайной величины.

Следовательно, в результате первичной статистической обработки данных мы получили возможность определить некоторые средние показатели интересующего нас признака, а также считать, что случайная величина X – производительность труда – распределена по нормальному закону. Нахождение приближенных значений параметров этого закона (оценок), и достоверное подтверждение такой гипотезы составляет содержание следующих задач и приемов математической статистики.

16. Рекомендации по выполнению расчетно-графической работы по теме «Описательная статистика» в MS Excel

Задание по выборке (объемом $\geq$ 80) (может быть выдана преподавателем или смоделирована студентом самостоятельно):

1. Дать экономическую интерпретацию исходным данным.
2. Построить точечный вариационный ряд, распределив значения по частотам (ряд 1).
3. От точечного ряда перейти к интервальному, взяв число интервалов k (ряд 2).
4. От интервального ряда перейти к точечному сгруппированному ряду (ряд 3), распределив значения: а) по частотам и относительным частотам в виде доли или процента (ряд 4), б) по накопленным частотам (ряд 5).
5. Построить полигон частот для ряда 3 или 4, гистограмму для ряда 2, кумуляту для ряда 5.
6. Построить эмпирическую функцию распределения по ряду 4.
7. Определить числовые характеристики: выборочное среднее, моду, медиану (по точечному, интервальному рядам и графику), выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс.
8. Сделать вывод о близости к нормальному закону.

***Пример* 15.3.** Изучается случайная величина X – количество пассажиров одного авиарейса «Иркутск-Москва» или «Москва-Иркутск», максимальная вместимость самолета типа «Аэробус А320» 140 человек (табл. 15.2).

Таблица 15.2

117	107	109	104	108	88	109	97	112	115
123	104	103	111	108	108	126	110	109	128
104	123	110	109	126	114	114	108	117	109
103	99	112	100	129	109	94	107	120	106
103	96	113	108	116	104	107	113	107	112
85	109	112	131	95	94	87	122	134	106
100	115	117	101	118	117	108	95	120	118
106	103	119	113	116	131	113	99	115	98
116	108	113	114	111	107	97	131	126	120
95	99	115	111	110	112	91	107	101	100

Построение точечного вариационного ряда 1

Заданную выборку данных набираем (копируем) в MS Excel (рис. 15.12).

Выстраиваем все данные в один столбец А. Затем выделяем этот столбец и сортируем данные по возрастанию значений. В MS Excel это можно сделать с помощью кнопки , расположенной на вкладке Главная MS Excel, далее выбираем пункт «А↓Я Сортировка по возрастанию». Если после сортировки столбца А первое значение (в ячейке А1) не является минимальным, то снова выбираем сортировку по возрастанию и убираем галочку в ☐ Мои данные содержат заголовки.

В примере 15.3 получается минимальное значение $x_{\min} = 85$ чел. Оно будет расположено в ячейке A1. Максимальное – $x_{\max} = 134$ чел. Оно будет расположено в ячейке A100. Между ними – все значения выборки, упорядоченные по возрастанию.

Чтобы быстро посчитать повторяющиеся значения, используем формулу =СЧЁТЕСЛИ($A$1:$A$100;A1) в ячейке B1 и затем растягиваем эту ячейку до конца столбца (рис. 15.13). В столбце B появятся значения повторений каждого числа в выборке (рис. 15.13).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	117	107	109	104	108	88	109	97	112	115
2	123	104	103	111	108	108	126	110	109	128
3	104	123	110	109	126	114	114	108	117	109
4	103	99	112	100	129	109	94	107	120	106
5	103	96	113	108	116	104	107	113	107	112
6	85	109	112	131	95	94	87	122	134	106
7	100	115	117	101	118	117	108	95	120	118
8	106	103	119	113	116	131	113	99	115	98
9	116	108	113	114	111	107	97	131	126	120
10	95	99	115	111	110	112	91	107	101	100
11										

Рис. 15.12. Исходные данные, скопированные в MS Excel из MS Word

1	85	=СЧЁТЕСЛИ($A$1:$A$100;A1)			
2	87	1			
3	88	1			
4	91	1			
5	94	2			
6	94	2			
7	95	3			
8	95	3			
9	95	3			
10	97	1			

Рис. 15.13. Использование функции =СЧЁТЕСЛИ($A$1:$A$100;A1) для вычисления частот ряда 1

Формируем ряд 1 (см. табл. 15.1) на этом же листе. Первая строка (уникальные значения из столбца A) x_i – значения выборки, начиная с $x_1 = x_{\min}$ и заканчивая $x_r = x_{\max}$, где r – число различных значений в выборке, $0 \le r \le n$. Вторая строка n_i – частота значения x_i (количество повторений одного и того же значения x_i, взятые из столбца B). Перенос уникальных значений осуществляем через специальную вставку в ячейку D2, отмечая пункты «значения» и «транспонировать» (шаг 2 на рис. 15.14): выделяем уникальные значения (столбец A и B одновременно), не забываем, что можно сразу выделить несколько разрывных массивов, зажимая клавишу Ctrl (шаг 1 на рис. 15.14):

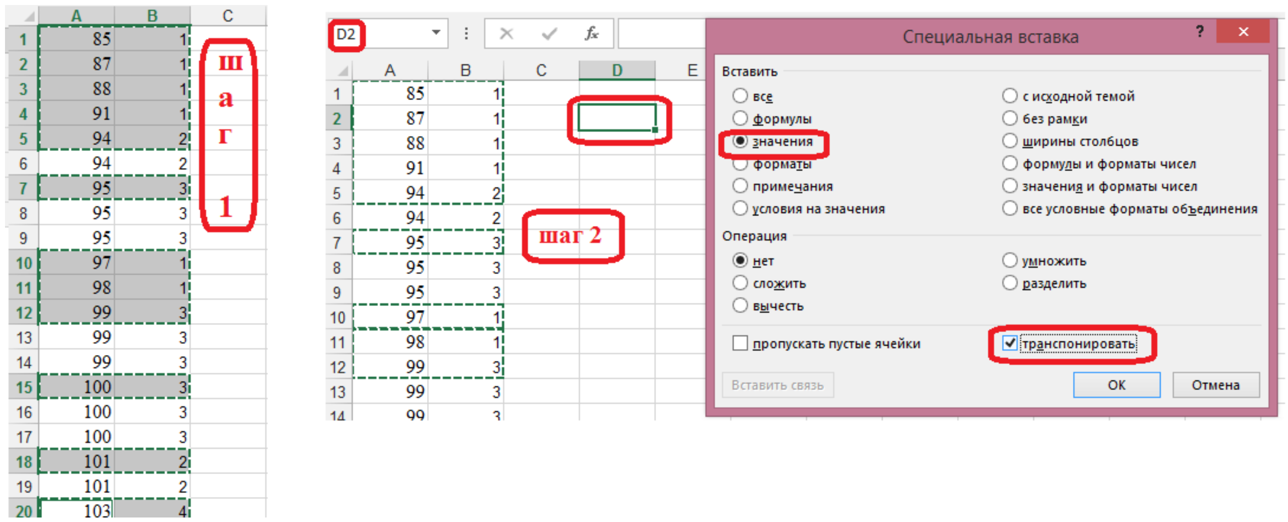
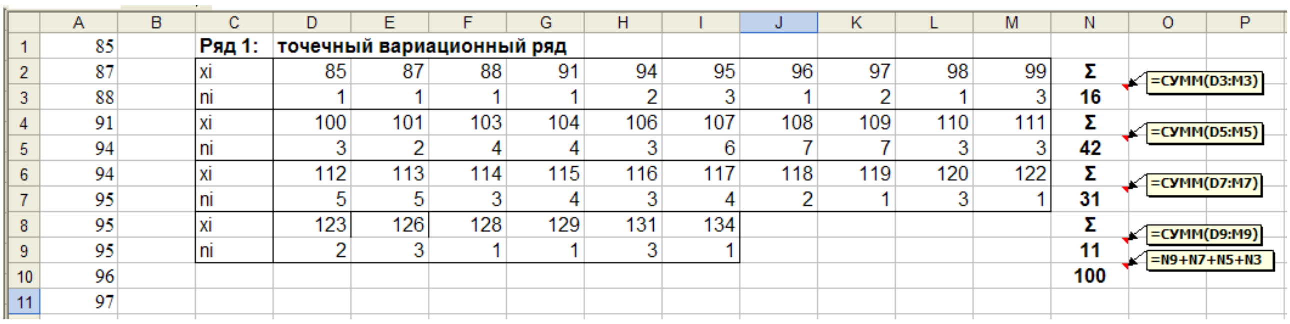


Рис. 15.14. Перенос значений в ряд 1

Оформляем полученный ряд, как на рис. 15.15.

Для проверки в конце каждой строки n_i можно посчитать сумму частот, выбрав кнопку «автосумма»  на панели управления (вкладка Главная). В конце, подсчитав итоговую сумму, сложив все промежуточные суммы, должно получиться значение объема выборки n. В примере 1 получилась сумма, равная 100 (рис. 15.15). По крайней мере, это означает, что при построении ряда 1 никакие значения исходных данных не были потеряны.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	85		Ряд 1:	точечный вариационный ряд												
2	87		xi	85	87	88	91	94	95	96	97	98	99	Σ	=СУММ(D3:M3)	
3	88		ni	1	1	1	1	2	3	1	2	1	3	16		
4	91		xi	100	101	103	104	106	107	108	109	110	111	Σ	=СУММ(D5:M5)	
5	94		ni	3	2	4	4	3	6	7	7	3	3	42		
6	94		xi	112	113	114	115	116	117	118	119	120	122	Σ	=СУММ(D7:M7)	
7	95		ni	5	5	3	4	3	4	2	1	3	1	31		
8	95		xi	123	126	128	129	131	134					Σ	=СУММ(D9:M9)	
9	95		ni	2	3	1	1	3	1					11	=N9+N7+N5+N3	
10	96													100		
11	97															

Рис. 15.15. Построение ряда 1 в MS Excel

Построение интервального вариационного ряда 2

Для построения интервального вариационного ряда 2 (табл. 15.2) сделаем вспомогательные расчеты. Для удобства можно в одном столбце набрать необходимые для вычислений показатели *n*, $x_{\min}$, $x_{\max}$, *R* – размах вариации, *k* – количество интервалов, *k* округляем сразу до целого значения: =ОКРУГЛ(LOG(n;2)+1;0), *h*– шаг интервала, вычисленный, C_0, C_1, …, C_k – границы интервалов. В соседнем столбце проводим расчеты перечисленных показателей с помощью формул (рис. 15.16). Важно помнить, что в MS Excel все вычисления надо начинать со знака равенства «=». Для нахождения *k* используем встроенную функцию = LOG(n;2), где в скобках ставим ссылку на ячейку, в которой записано значение объема выборки *n*, затем через знак «;» пишем 2 – это основание логарифма. Так как *k* должно быть целым числом, то сразу применяем функцию =ОКРУГЛ(LOG(n;2)+1;0), где 0 – это число разрядов. При расчете границ интервалов в C_0 ссылаемся на $x_{\min}$, в C_1 пишем формулу (рис. 15.16), не забывая ставить значок $ (значок $ можно поставить 1) вручную, нажав Shift 4 в латинской раскладке клавиатуры, 2) автоматически, нажав клавишу F4) для шага интервала *h*, чтобы при последующем копировании для автоматического вычисления C_2,…, C_k, это значение было зафиксировано и не менялось.

	A	B	C	D	E	F
10	97		n=	100		
11	98		x min =	85		
12	99		x max =	134		
13	99		R=	49		
14	99				=ОКРУГЛ(LOG(D10;2)+1;0)	
15	100		k=	8,00		
16	100		h=	6,125	=D13/D15	
17	100		Co=	85	=D11	
18	101		C1=	91,125	=D17+$D$16	
19	101		C2=	97,25		
20	103		C3=	103,375		
21	103		C4=	109,5		
22	103		C5=	115,625		
23	103		C6=	121,75		
24	104		C7=	127,875		
25	104		C8=	134		

Рис. 15.16. Расчеты для построения ряда 2 примера 15.3

После того, как границы интервалов найдены, формируем интервальный ряд 2, используя для этого функцию =СЦЕПИТЬ(). Ссылками указываем границы интервалов, используя функцию =ОКРУГЛ(ссылка на ячейку;2), 2 – число разрядов, исходя из исходных данных, знак «;» между значениями границ интервалов вводим следующим образом (с учетом кавычек и пробела): “; ” (рис. 15.17). Например, для получения первого интервала в ячейке G14 запишем: =СЦЕПИТЬ(ОКРУГЛ(D17;2);"; ";ОКРУГЛ(D18;2)), затем растянем ячейку

G14 на k интервалов вниз (рис. 15.17). Полученный столбец для удобства последующего переноса расчетов в MS Word скопируем и вставим в свободное место, используя специальную вставку: значения и транспонировать (рис. 15.18). Следующим шагом нам нужно посчитать, сколько значений выборки вошло в каждый из интервалов. Для этого в MS Excel необходимо настроить пакет анализа: MS Excel-2013 (и более новые версии) меню Файл (зеленый прямоугольник в левом верхнем углу, затем выбираем Параметры, потом Надстройки, потом в середине внизу будет кнопка Перейти, нажимаем ее, ставим галочку напротив «Пакет анализа», нажимаем ОК, переходим на вкладке Данные в меню Анализ данных (расположен в правом верхнем углу)). Открываем Анализ данных и выбираем пункт Гистограмма: входной интервал: все исходные данные столбца А. Интервал карманов: значения границ интервалов с С1 (а не С0) до Ck. Выходной интервал: свободное пространство на листе (рис. 15.19). Итог имеет вид как на рис. 15.19. Значения столбца Частота через меню «Специальная вставка» – «транспонировать» переносим во вторую строку ряда 2 n_i (рис. 15.20), находим сумму частот, чтобы убедиться в том, что расчет частот для каждого интервала выполнен без потерь данных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
12	99		x max =	134			Интервальный ряд 2				
13	99		R=	49			Ci-1; Ci	=СЦЕПИТЬ(ОКРУГЛ(D17;2);"; ";ОКРУГЛ(D18;2))			
14	99						85; 91,13				
15	100		k=	8,00			91,13; 97,25	=СЦЕПИТЬ(ОКРУГЛ(D18;2);"; ";ОКРУГЛ(D19;2))			
16	100		h=	6,125			97,25; 103,38				
17	100		Co=	85			103,38; 109,5				
18	101		C1=	91,125			109,5; 115,63				
19	101		C2=	97,25			115,63; 121,75				
20	103		C3=	103,375			121,75; 127,88				
21	103		C4=	109,5			127,88; 134				
22	103		C5=	115,625							
23	103		C6=	121,75							
24	104		C7=	127,875							
25	104		C8=	134							

Рис. 15.17. Применение функции =СЦЕПИТЬ()

	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
12	Интервальный ряд 2										
13	Ci-1; Ci		Ci-1; Ci	85; 91,13	91,13; 97,25	97,25; 103,38	103,38; 109,5	109,5; 115,63	115,63; 121,75	121,75; 127,88	127,88 ; 134
14	85; 91,13										
15	91,13; 97,25										
16	97,25; 103,38										
17	103,38; 109,5										
18	109,5; 115,63										
19	115,63; 121,75										
20	121,75; 127,88										
21	127,88; 134										

Рис. 15.18. Формирование интервального ряда 2

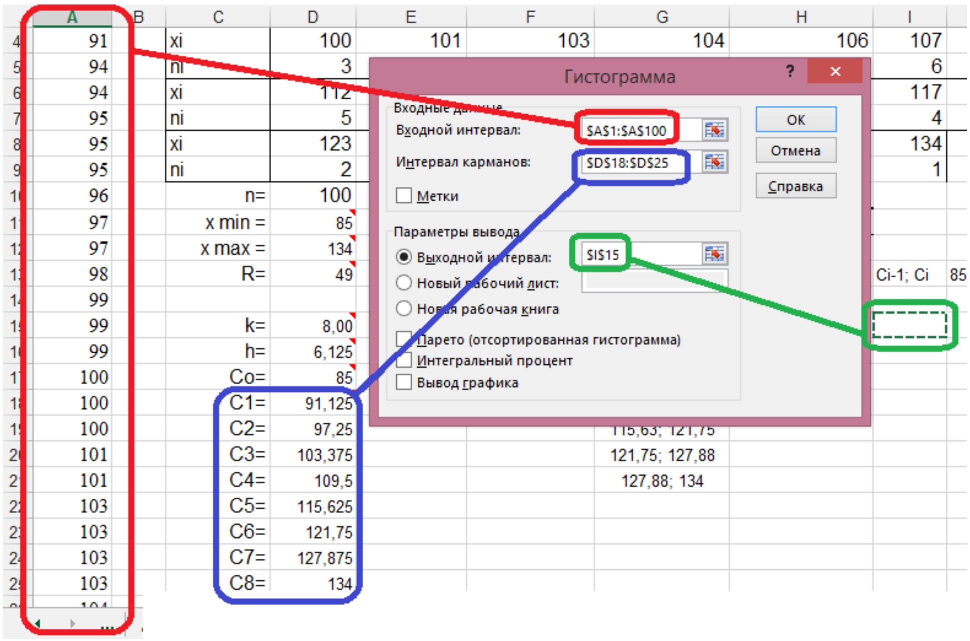
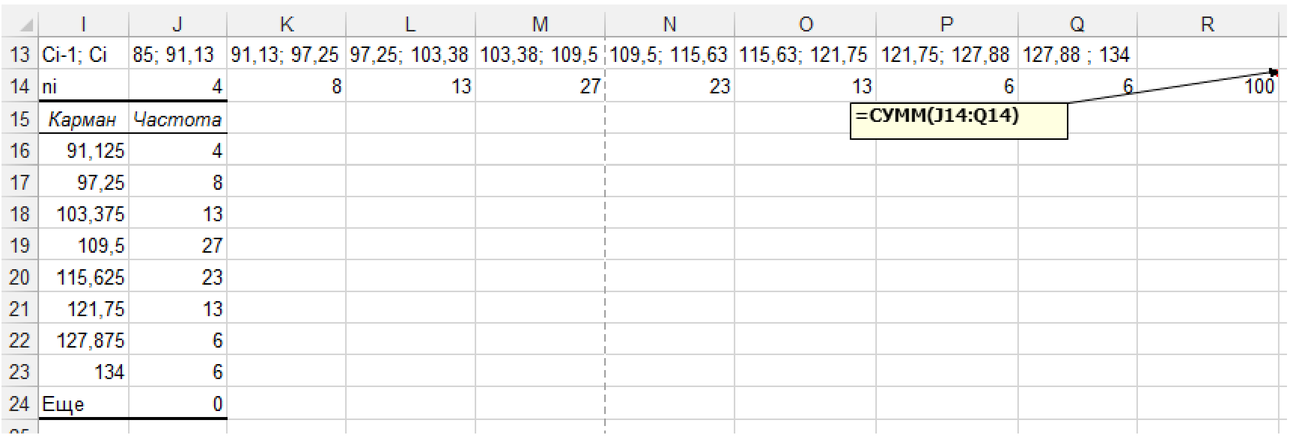


Рис. 15.19. Использование функции гистограмма
для вычисления частот интервального ряда 2



	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
13	Ci-1; Ci	85; 91,13	91,13; 97,25	97,25; 103,38	103,38; 109,5	109,5; 115,63	115,63; 121,75	121,75; 127,88	127,88 ; 134	
14	ni	4	8	13	27	23	13	6	6	100
15	*Карман*	*Частота*					=СУММ(J14:Q14)			
16	91,125	4								
17	97,25	8								
18	103,375	13								
19	109,5	27								
20	115,625	23								
21	121,75	13								
22	127,875	6								
23	134	6								
24	Еще	0								

Рис. 15.20. Перенос частот в ряд 2

Построение точечных сгруппированных рядов 3–5

Для построения рядов 3–5, вычисления значений эмпирической функции распределения $F(x)$ создаем вспомогательную таблицу в MS Excel (рис. 15.21) – аналог таблицы 15.1. Во всех ячейках вспомогательной таблицы на рис. 15.21 записываем ссылки или формулы (см. примечания к ячейкам). В столбцах E, G, I, J, K в первой строке таблицы (в MS Excel это строка 27) делаем вычисления по формулам числовых характеристик, а затем их копируем в остальные строки. При заполнении столбцов C_{i-1}, C_i в первой строке ставим ссылки на значения ячеек C_0 и C_1, рассчитанные ранее (рис. 15.16). Во второй строке столбца C_{i-1}

ставим ссылку на верхнюю границу предыдущего интервала, а в столбце C_i пишем формулу вычисления границ интервала, не забывая фиксировать шаг интервала (рис. 15.21). Затем снова копируем в оставшиеся строки. В столбец n_i ссылки ставим вручную из интервального ряда 2 (рис. 15.20, столбец частота). При расчете накопленных частот в столбце m_i в первой строке ставим ссылку на частоту n_1, во второй записываем значение $m_2 = m_1 + n_2$, в оставшиеся ячейки столбца m_i копируем m_2 (рис. 15.21).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
22	103		C5=	115,625					127,875	6	
23	103		C6=	121,75					134	6	
24	103		C7=	127,875							
25	104		C8=	134							F*(x)
26	104		C i-1	C i	x*i	n i	x* i * n i	m i	n i /(n*h)	w i	0
27	104		85	91,125	88,063	4	352,25	4	0,0065	0,04	0,04
28	104		91,125	97,25	94,188	8	753,5	12	0,0131	0,08	0,12
29	104		97,25	103,375	100,313	13	1304,1	25	0,0212	0,13	0,25
30	106		103,375	109,5	106,438	27	2873,8	**52**	0,0441	0,27	0,52
31	106		109,5	115,625	112,563	23	2588,9	75	0,0376	0,23	0,75
32	106		115,625	121,75	118,688	13	1542,9	88	0,0212	0,13	0,88
33	107		121,75	127,875	124,813	6	748,9	94	0,0098	0,06	0,94
34	107		127,875	134	130,938	6	785,6	100	0,0098	0,06	1
35	107					**100**	**10950**			**1**	

=D17 =D18 =(C27+D27)/2 =J16 =E27*F27 =F27/$D$16 =F28+H27 =F27 =F27/$D$10 =H27/$D$10

Рис. 15.21. Вспомогательные расчеты для построения рядов 3–5 и $F^*(x)$

Ряды 3 – 5 оформляем по формулам (15.3) – (15.5) (рис. 15.22). Для этого копируем соответствующие данные из вспомогательной таблицы и вставляем их в новую таблицу с использованием «специальной вставки» контекстного меню, в которой надо отметить пункты «значения» и «транспонировать».

	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	**Ряд 3:**	**точечный сгруппированный ряд (по частотам)**							
2	x*i	88,063	94,188	100,313	106,438	112,563	118,688	124,813	130,938
3	ni	4	8	13	27	23	13	6	6
4									
5	**Ряд 4:**	**точечный сгруппированный ряд (по относительным частотам)**							
6	x*i	88,063	94,188	100,313	106,438	112,563	118,688	124,813	130,938
7	w i	0,04	0,08	0,13	0,27	0,23	0,13	0,06	0,06
8	w i*100%	4%	8%	13%	27%	23%	13%	6%	6%
9									
10	**Ряд 5:**	**точечный сгруппированный ряд (по накопленным частотам)**							
11	x*i	88,063	94,188	100,313	106,438	112,563	118,688	124,813	130,938
12	m i	4	12	25	52	75	88	94	100

Рис. 15.22. Ряды 3–5

Построение графиков

Для построения гистограммы выделяем столбец $n_i/(nh)$ вспомогательной таблицы (рис. 15.23), затем на панели инструментов выбираем вкладку Вставка, нажимаем кнопку «Гистограмма» и выбираем подходящий вид гистограммы (рис. 15.23).

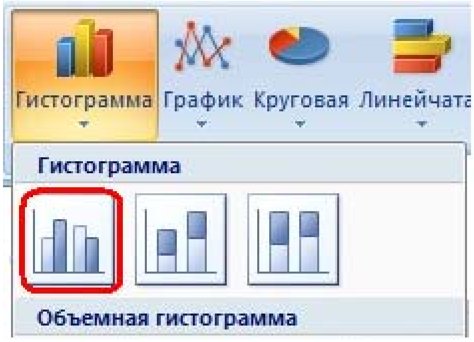


Рис. 15.23. Выбор подходящего вида гистограммы в MS Excel

После этого на самом рабочем листе появится гистограмма, которую нужно будет отредактировать: 1) нужно «склеить» столбцы – в контекстном меню выбираем «формат ряда данных», вкладку «Параметры ряда» и устанавливаем ширину зазора, равную 0 (рис. 15.24); 2) чтобы на гистограмму добавить ломаную линию, соединяющую середины прямоугольников, выполняем следующие действия: в контекстном меню выбираем пункт «Выбрать данные», затем добавляем на график еще одну гистограмму, и ее переделываем в ломаную линию (рис. 15.25); 3) подписи оси OX делаем искусственно, так как нужным образом, как на рис. 15.1, в MS Excel их не сделаешь. Самым простым способом это можно сделать, добавив подписи оси OX, затем скопировав гистограмму в Paint, и переместить подписи оси OX влево. (рис. 15.26).

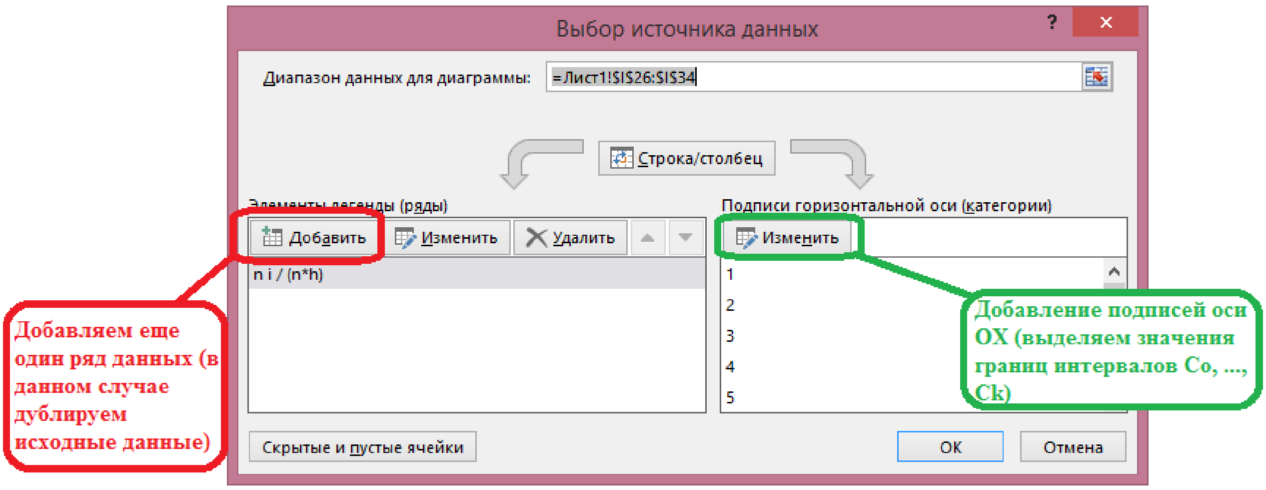


Рис. 15.24. Добавление еще одного ряда данных на график и подписей оси OX

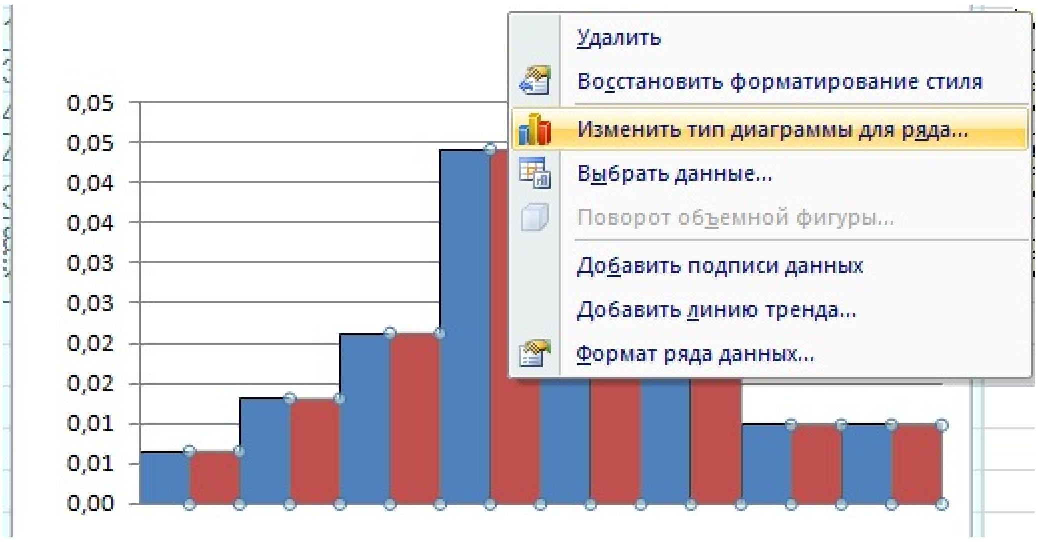


Рис. 15.25. Добавление на гистограмму ломаной линии

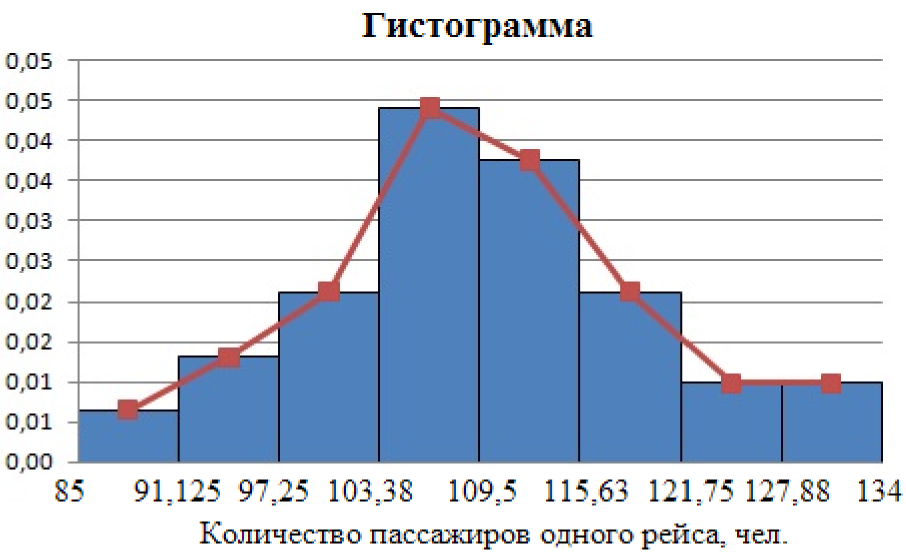


Рис. 15.26. Гистограмма, отредактированная с помощью Paint

Для построения полигона частот (относительных частот) выделяем столбец n_i, затем на вкладке Вставка выбираем кнопку «График» и вид графика (рис. 15.27).

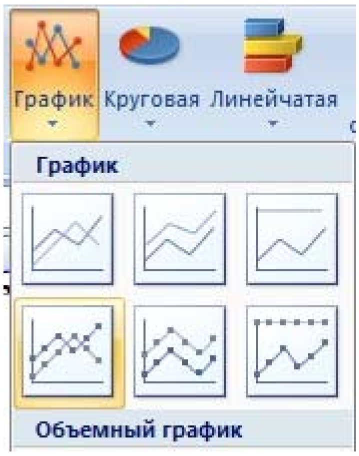


Рис. 15.27. Выбор подходящего вида графика для полигона частот

Затем на построенном графике делаем название диаграммы, подписи оси OX, (рис. 15.28).

Рис. 15.28. Полигон частот

Эмпирическая функция распределения

Значения эмпирической функции распределения $F^*(x)$ уже рассчитаны во вспомогательной таблице (рис. 15.21). Для построения графика функции $F^*(x)$ в MS Excel нет специальной встроенной команды, поэтому график, подобный рис. 15.4, можно построить следующим образом. Выделяем столбец $F^*(x)$ и строим по нему гистограмму. Она получится, как лесенка с поднимающимися вверх ступеньками. Затем «склеиваем» столбики, делаем их фон белого цвета, убираем сетку, закрасив ее линии в белый цвет. Как и при построении гистограммы, делаем подписи оси X (можно их просто оттуда скопировать). Предварительно график $F^*(x)$ будет выглядеть как на рис. 15.29. После этого копируем полученный график функции в Paint. С помощью ластика аккуратно убираем вертикальные линии, потом к оставшимся горизонтальным прямым подрисовываем стрелки с левой стороны. График эмпирической функции распределения $F^*(x)$ готов (рис. 15.30).

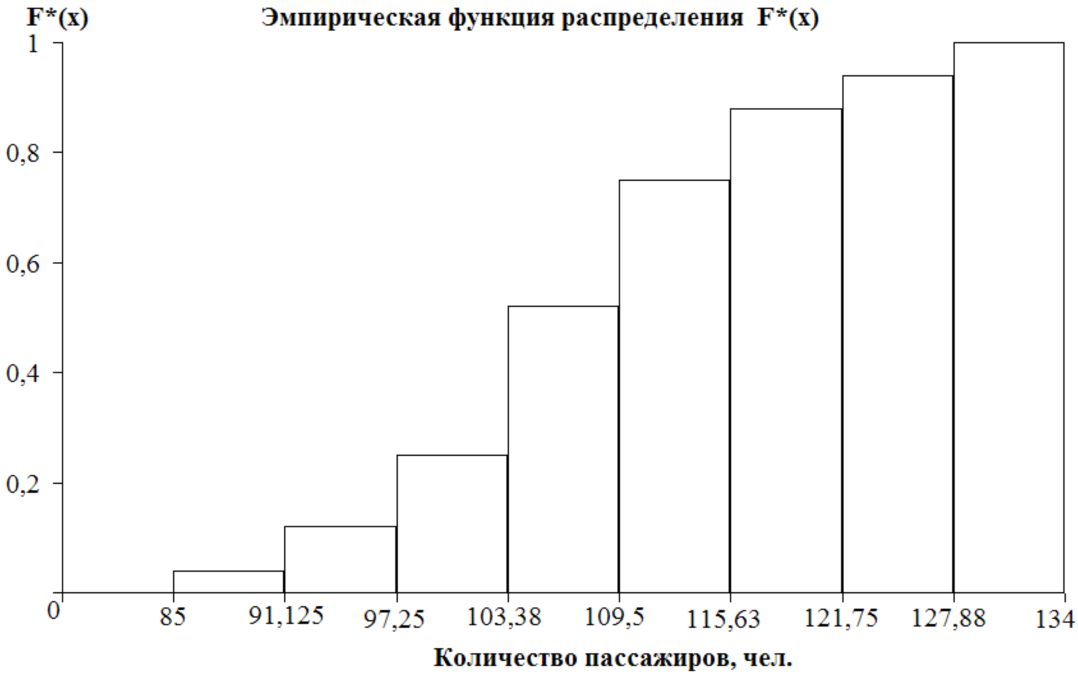
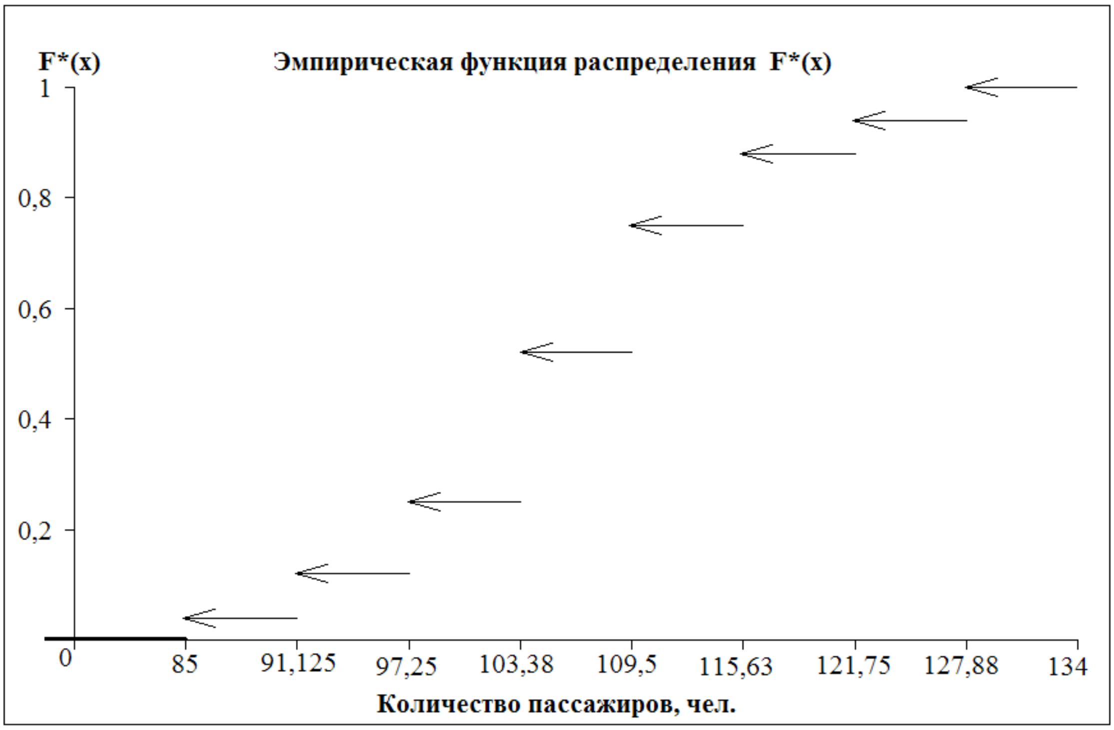


Рис. 15.29. Предварительная подготовка графика $F^*(x)$ в MS Excel



15.30. Эмпирическая функция распределения

Вычисление числовых характеристик

Предварительные расчеты среднего выборочного значения уже сделаны (рис. 15.21), поэтому остается $\bar{x}_в$ вычислить по формуле (1.6). Для расчета моды определяем модальный интервал по наибольшей частоте (на рис. 15.21 он выделен жирным шрифтом), внизу таблицы записываем все компоненты формулы (15.8) и находим x_{mod}. Аналогично отмечаем медианный интервал по накопленной частоте, превышающей половину объема выборки n. В примере 15.3 это $m_4 = 52$. Все расчеты x_{mod}, x_{med} и $\bar{x}_в$ (x ср) показаны на рис. 15.31.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
36		Расчет моды			Расчет медианы			x ср =	**109,5**	
37		x mod(min)=	103,38		x med(min)=	103,38				
38		n mod =	27		n med=	27				
39		n mod-1=	13		m med-1=	25				
40		n mod+1 =	23		n/2=	50				
41		h=	6,125							
42		x mod=	**108,139**		x med=	**109,046**				
43										
44										

=G35/F35

=D37+D41*(D38-D39)/(2*D38-D39-D40)

=G37+D41*(G40-G39)/G38

15.31. Вычисления мер положения

Для вычисления мер разброса и мер формы в MS Excel создаем новую вспомогательную таблицу (табл. 15.1, рис. 15.32). В столбце «x*i–xср» ссылку на значение $\bar{x}_в$ (x ср) обязательно фиксируем (кнопка F4). В следующих четырех столбцах значок возведения в степень «^» ставится как shift 6 в латинской раскладке клавиатуры.

Обязательно рассчитывается столбец «проверка»: $\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i * - \bar{x}_в)^2 = 0$.

	C	D	E	F	G	H	I	J
45				=E48*D48				
46			=C48-$J$36	Проверка:	=D48*E48^2	=D48*C48^2	=D48*E48^3	=D48*E48^4
47	x*i	n i	x*i - x cp	ni*(x*i - x cp)	ni*(x*i - x cp)^2	ni*(x*i)^2	ni*(x*i - x cp)^3	ni*(x*i - x cp)^4
48	88,0625	4	-21,438	-85,750	1838,27	31020,02	-39407,8	844805,1
49	94,1875	8	-15,313	-122,500	1875,78	70970,28	-28722,9	439819,4
50	100,3125	13	-9,188	-119,438	1097,33	130813,77	-10081,7	92626,0
51	106,4375	27	-3,063	-82,688	253,23	305881,42	-775,5	2375,0
52	112,5625	23	3,063	70,438	215,71	291417,28	660,6	2023,2
53	118,6875	13	9,188	119,438	1097,33	183127,39	10081,7	92626,0
54	124,8125	6	15,313	91,875	1406,84	93468,96	21542,2	329864,6
55	130,9375	6	21,438	128,625	2757,40	102867,77	59111,7	1267207,7
56	**Σ**	**100**	**-**	**0,000**	**10541,9**	**1209566,9**	**12408,3**	**3071346,9**
57								
58	**Dв1=**	**105,42**	=G56/D56	**Dв2=**	**105,42**	=H56/D56-J36^2		
59	**σв=**	**10,27**	=D58^0,5					
60	**V=**	**9,38**	=D59/J36*100					
61	μ3=	124,083	=H56/D56					
62	**As=**	**0,115**	=D61/D59^3					
63	μ4=	30713,5	=I56/D56					
64	**Ek=**	**-0,236**	=D63/D59^4-3					

Рис. 15.32. Расчеты мер разброса и формы

Для вычисления среднеквадратического отклонения можно значение дисперсии возвести в степень 0,5 или использовать встроенную в MS Excel функцию =КОРЕНЬ(), в скобках ставится ссылка на соответствующую ячейку.

Оформление полученных результатов в MS WORD

После проведения всех расчетов темы 1 оформляем полученные результаты в MS Word (если нет такой возможности, то в письменном виде на листах А4 или в тетради). Правила оформления расчетно-графической работы аналогичны правилам оформления курсовой работы. Начинаем с титульного листа, на котором указываем название работы, номер варианта (если таковой был), ФИО исполнителя и номер группы, ФИО преподавателя, проверяющего эту работу. На следующей странице описываем все сделанные в MS Excel расчеты, сопровождая их соответствующими выводами. Все формулы, встречающиеся при выполнении работы, необходимо набирать с помощью встроенного в MS Word редактора формул Microsoft Equation 3.0 (рис. 15.33) или Math Type (Кнопка π Уравнение на вкладке Вставка). Рассмотрим все сказанное выше на данных примера 1.

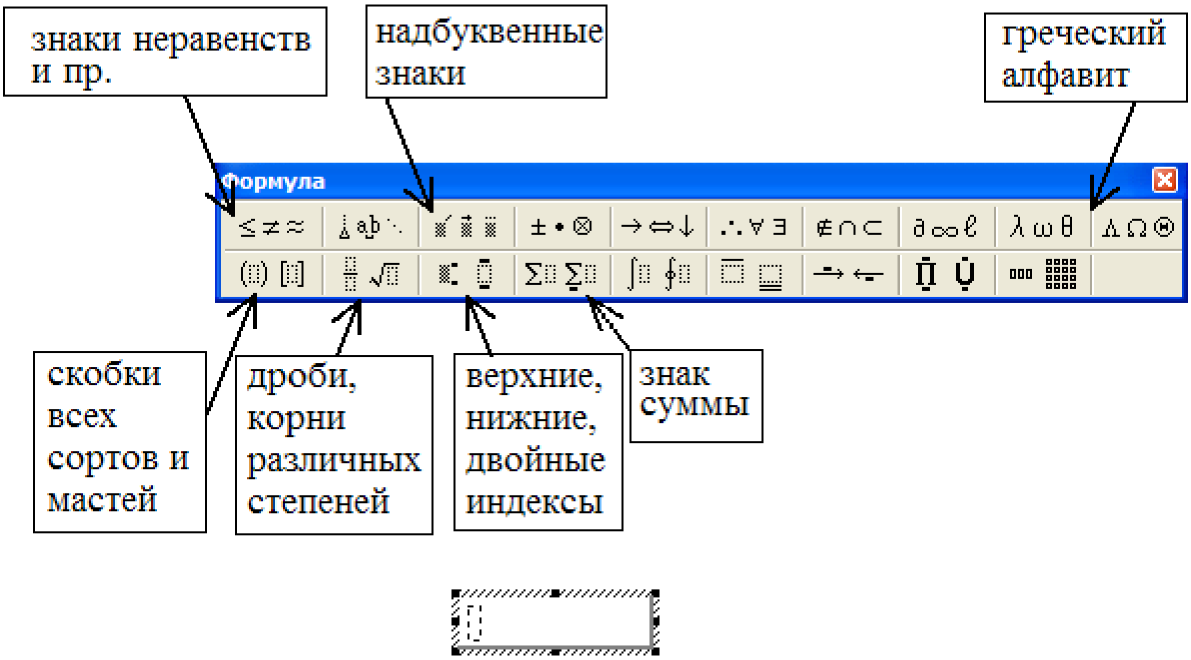


Рис. 15.33. Редактор формул Microsoft Equation 3.0

***Пример* 15.4.** Оформление результатов проведенных расчетов по теме «Описательная статистика». В расчетно-графической работе анализируется случайная величина X – количество пассажиров одного авиарейса «Иркутск-Москва» или «Москва-Иркутск». Проведено 100 наблюдений, результаты которых представлены в таблице:

Результаты наблюдений: количество пассажиров одного авиарейса, чел.

117	107	109	104	108	88	109	97	112	115
123	104	103	111	108	108	126	110	109	128
104	123	110	109	126	114	114	108	117	109
103	99	112	100	129	109	94	107	120	106
103	96	113	108	116	104	107	113	107	112
85	109	112	131	95	94	87	122	134	106
100	115	117	101	118	117	108	95	120	118
106	103	119	113	116	131	113	99	115	98
116	108	113	114	111	107	97	131	126	120
95	99	115	111	110	112	91	107	101	100

2. Для построения точечного вариационного ряда 1, расположим значения x_i по возрастанию и отметим частоту n_i, соответствующую каждому x_i.

Ряд 1. Точечный вариационный ряд.

x_i	85	87	88	91	94	95	96	97	98
n_i	1	1	1	1	2	3	1	2	1
x_i	99	100	101	103	104	106	107	108	109

n_i	3	3	2	4	4	3	6	7	7
x_i	110	111	112	113	114	115	116	117	118
n_i	3	3	5	5	3	4	3	4	2
x_i	119	120	122	123	126	128	129	131	134
n_i	1	3	1	2	3	1	1	3	1

Проверка: $\sum_{n=1}^{36} n_i = 100$. В результате построение ряда 1 получилось 36 различных значений в выборке.

3. Чтобы от ряда 1 перейти к интервальному ряду 2, проводим следующие вспомогательные расчеты:

$x_{\max} = 134$ чел., $x_{\min} = 85$ чел.

Размах вариации $R = 134 - 85 = 49$ чел. Получаем диапазон значений в выборке $[85; 134]$, который для удобства расчетов следует разбить на k интервалов:

$k \approx \log_2 100 + 1 = 7{,}645$. Так как k должно быть целым, тогда берем $k = 8$ интервалам.

Шаг интервала (ширина интервала) h = 49 / 8 = 6,125.

Находим границы интервалов:

$C_0 = 85$, $C_1 = 85 + 6{,}125 = 91{,}125$, $C_2 = 91{,}125 + 6{,}125 = 97{,}25$, $C_3 = 103{,}375$, $C_4 = 109{,}5$, $C_5 = 115{,}625$, $C_6 = 121{,}75$, $C_7 = 127{,}875$, $C_8 = 134 = x_{\max}$.

Подсчитываем, сколько значений попало в каждый интервал, и оформляем результаты в виде ряда 2:

Ряд 2. Интервальный ряд.

$C_{i-1} - C_i$	85 – 91,125	91,125 – 97,25	97,25 – 103,375	103,375 – 109,5
n_i	4	8	13	27
$C_{i-1} - C_i$	109,5 –115,625	115,625 – 121,75	121,75 – 127,875	127,875 – 134
n_i	23	13	6	6

Проверка: $\sum_{n=1}^{8} n_i = 100$.

4. Для построения ряда 3 находим середину каждого интервала:

$x_1^* = \dfrac{85 + 91{,}125}{2} = 88{,}063$, $x_2^* = \dfrac{91{,}125 + 97{,}25}{2} = 94{,}188$,

$x_3^* = \dfrac{97{,}25 + 103{,}375}{2} = 100{,}313$, $x_4^* = \dfrac{103{,}375 + 109{,}5}{2} = 106{,}348$,

$x_5^* = \dfrac{109,5 + 115,625}{2} = 112,563$, $x_6^* = \dfrac{115,625 + 121,75}{2} = 118,688$,

$x_6^* = \dfrac{121,75 + 127,875}{2} = 124,813$, $x_8^* = \dfrac{127,875 + 134}{2} = 130,938$.

Ряд 3. Точечный ряд.

x_i^*	88,063	94,188	100,313	106,438	112,563	118,688	124,813	130,938
n_i	4	8	13	27	23	13	6	6

Для ряда 4 находим относительные частоты:

$w_1 = \dfrac{n_1}{n} = \dfrac{4}{100} = 0,04$, $w_2 = \dfrac{n_2}{n} = \dfrac{8}{100} = 0,08$, $w_3 = \dfrac{n_3}{n} = \dfrac{13}{100} = 0,13$,

$w_4 = \dfrac{n_4}{n} = \dfrac{27}{100} = 0,27$, $w_5 = \dfrac{n_5}{n} = \dfrac{23}{100} = 0,23$, $w_6 = \dfrac{n_6}{n} = \dfrac{13}{100} = 0,13$,

$w_7 = \dfrac{n_7}{n} = \dfrac{6}{100} = 0,06$, $w_8 = \dfrac{n_8}{n} = \dfrac{6}{100} = 0,06$.

Относительная частота w_i показывает, какую долю занимает данное значение x_i^* в общем объеме выборки. Например, $x_5^* = 112,563$ составляет 23% от всех значений в выборке, т.е. в 23 % случаев наполняемость одного авиарейса была примерно 113 пассажиров.

Ряд 4. Точечный ряд, построенный по относительным частотам.

x_i^*	88,063	94,188	100,313	106,438	112,563	118,688	124,813	130,938
w_i	0,04	0,08	0,13	0,27	0,23	0,13	0,06	0,06
w_i,%	4%	8%	13%	27%	23%	13%	6%	6%

Проверка: $\sum\limits_{n=1}^{8} w_i = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{8} w_i \cdot 100\% = 100\%$.

Для ряда 5 рассчитываем накопленные частоты: $m_1 = n_1 = 4$,

$m_2 = n_2 + m_1 = 4 + 8 = 12$, $m_3 = n_3 + m_2 = 13 + 12 = 25$,

$m_4 = n_4 + m_3 = 25 + 27 = 52$, $m_5 = n_5 + m_4 = 52 + 23 = 75$,

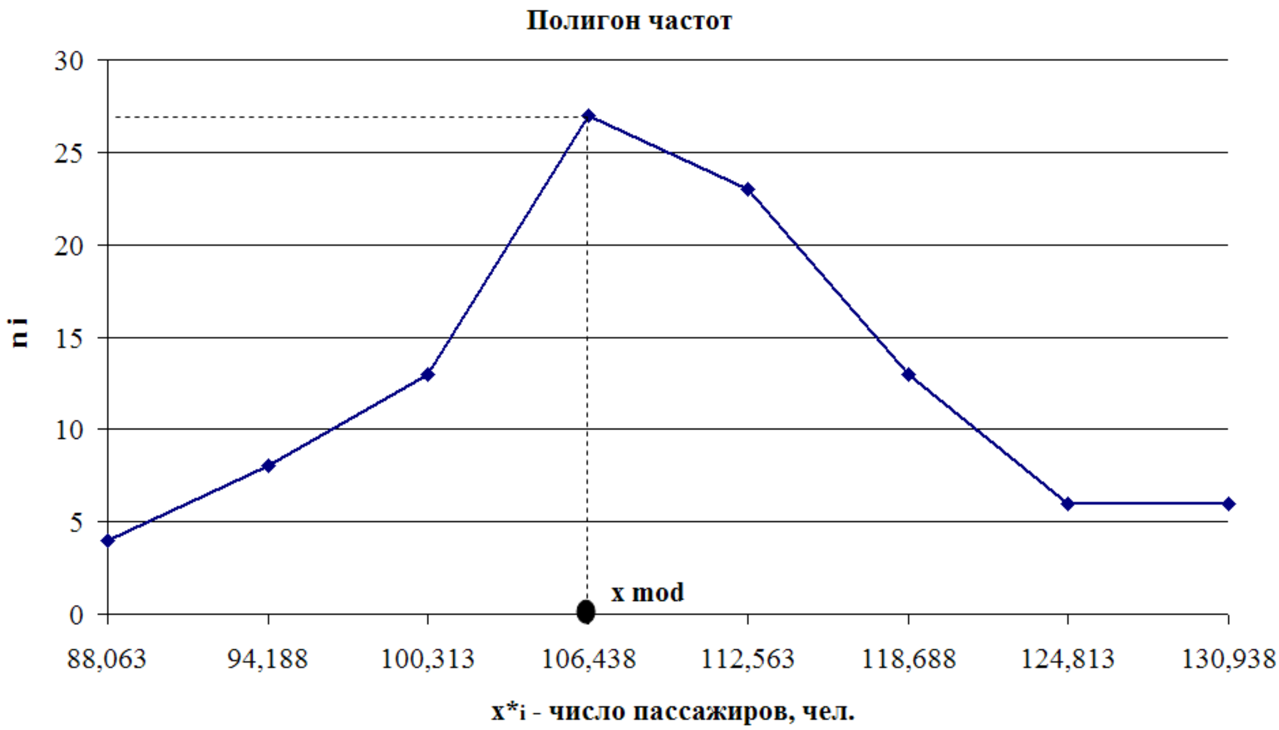
$m_6 = n_6 + m_5 = 13 + 75 = 88$, $m_7 = n_7 + m_6 = 6 + 88 = 94$,

$m_8 = n_8 + m_7 = 6 + 94 = 100$.

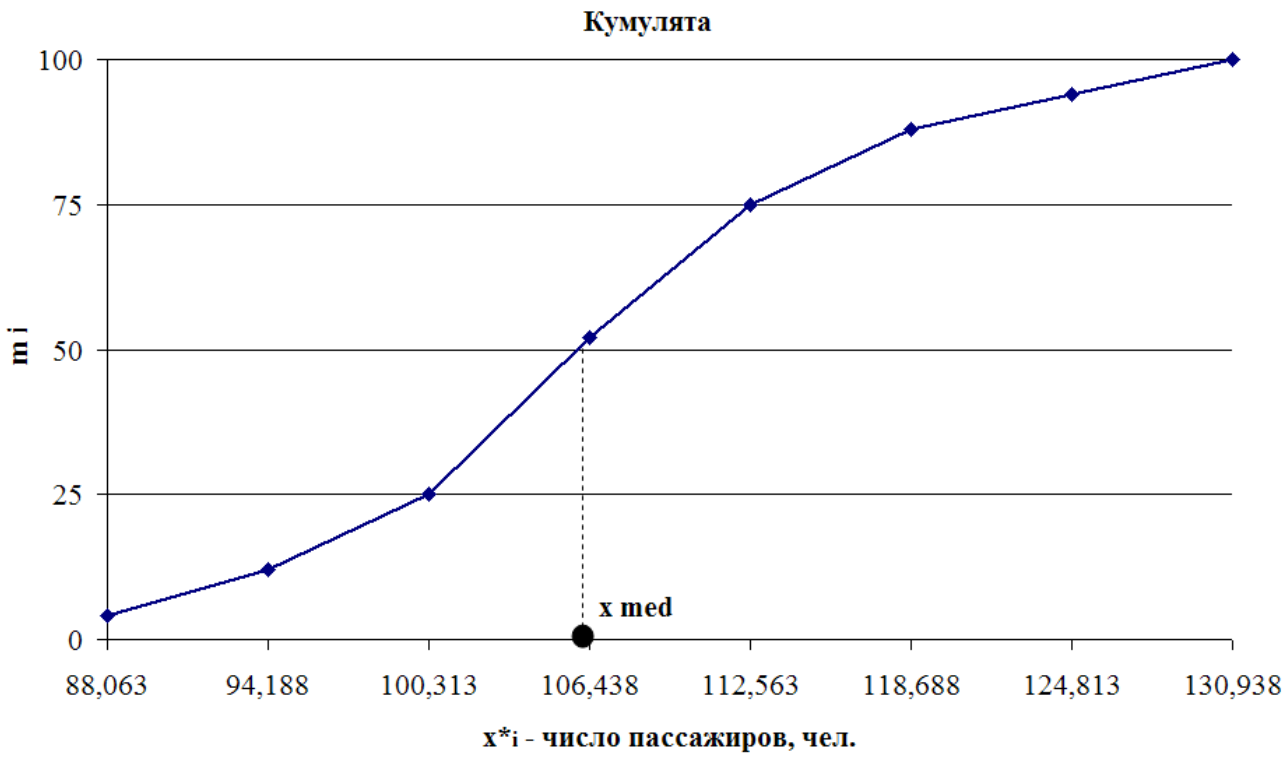
Ряд 5. Точечный ряд, построенный по накопленным частотам.

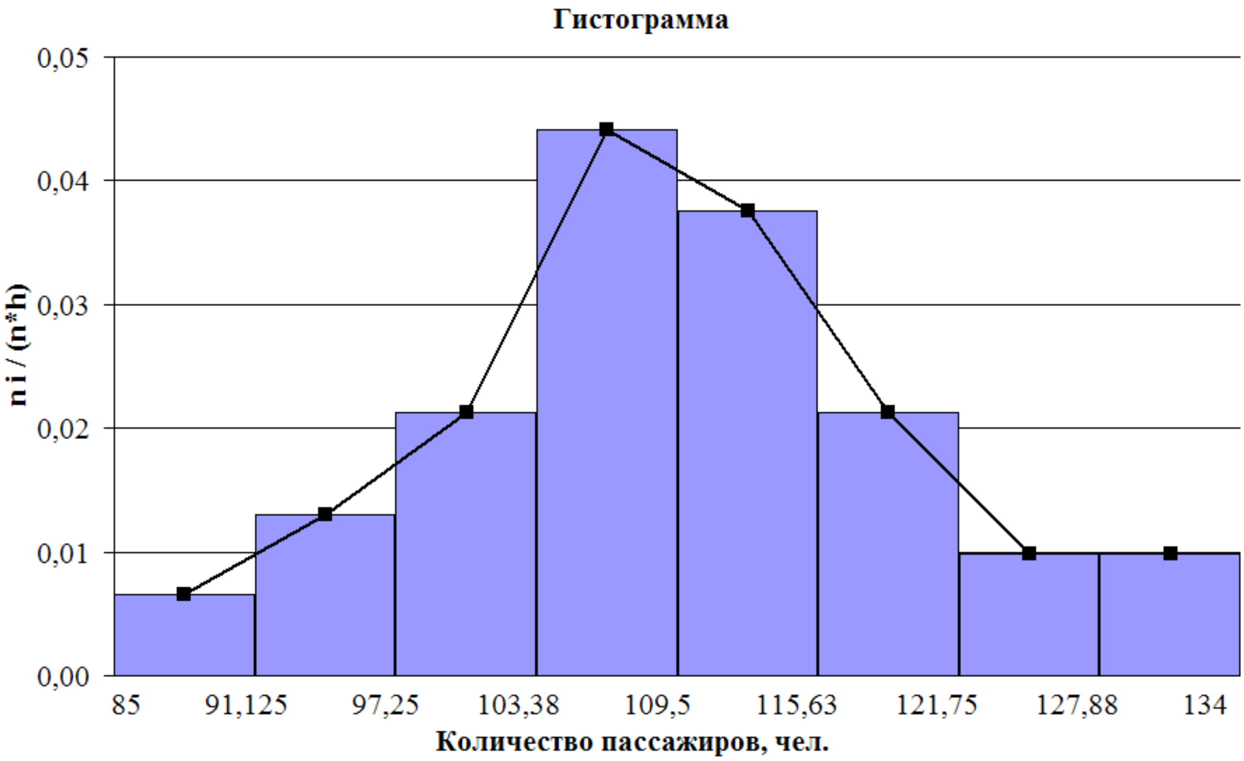
x_i^*	88,063	94,188	100,313	106,438	112,563	118,688	124,813	130,938
m_i	4	12	25	52	75	88	94	100

5. Графики:



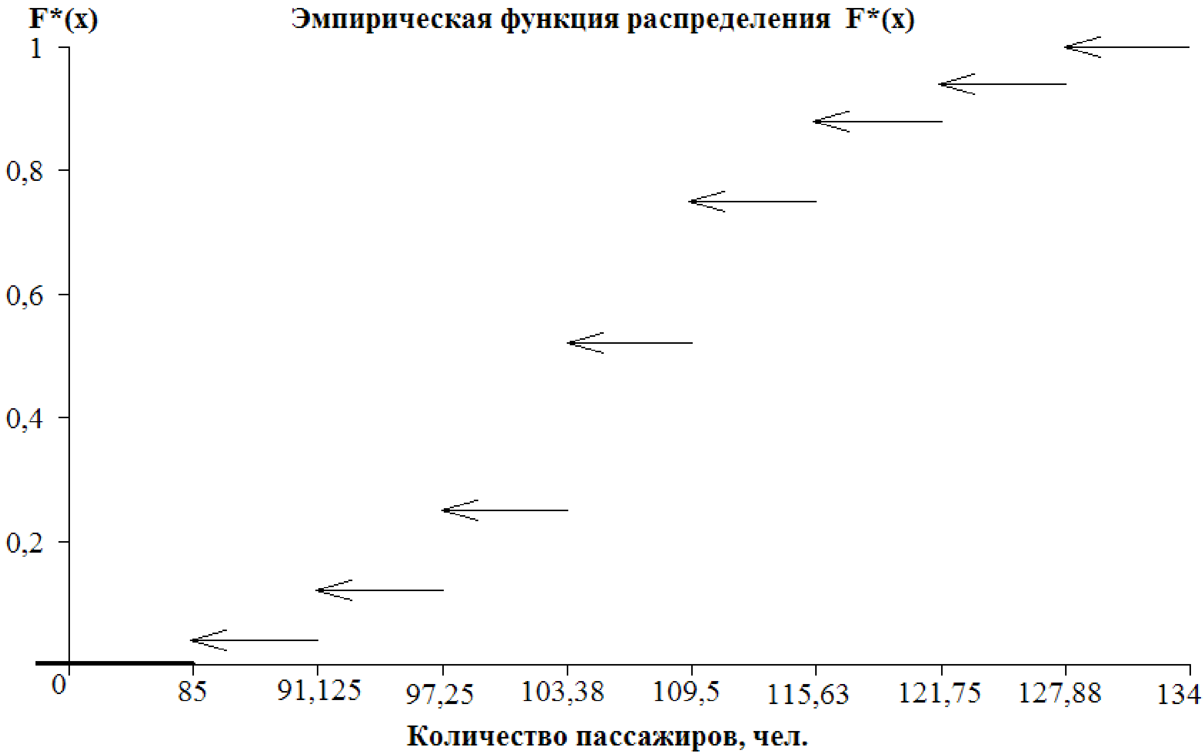
По графикам можно определить следующие меры положения: моду x_{mod} – по полигону частот, как значение, соответствующее наибольшей частоте ($x_{\text{mod}} \approx 106$ чел.), медиану x_{med} – по кумуляте, как значение, соответствующее половине выборке, т.е. 50 ($x_{med} \approx 106$ чел.). Это означает, что на авиарейсах «Иркутск–Москва» или «Москва–Иркутск» чаще всего летает 106 пассажиров, средневероятное число пассажиров тоже составляет 106 пассажиров.





6. Эмпирическая функция распределения: $F^*(x)$ – это статистическая аппроксимация функции распределения $F(x) = P(x < X)$. Например, $F^*(x) = 0{,}75$ – это вероятность того, что $x < 118{,}688$, т.е. в 75% случаев число пассажиров в одном рейсе составляло менее 119 чел.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 88{,}063, \\ 0{,}04, & 88{,}063 < x \le 94{,}188, \\ 0{,}12, & 94{,}188 < x \le 100{,}313, \\ 0{,}25, & 100{,}313 < x \le 106{,}438, \\ 0{,}52, & 106{,}438 < x \le 112{,}563, \\ 0{,}75, & 112{,}563 < x \le 118{,}688, \\ 0{,}88, & 118{,}688 < x \le 124{,}813, \\ 0{,}94, & 124{,}813 < x \le 130{,}938, \\ 1, & x > 130{,}938. \end{cases}$$



7. Числовые характеристики

Для расчета числовых характеристик составим вспомогательную таблицу:

		расчет $\bar{x}_в$		расчет $D_в$		расчет A_s	расчет E_k
x_i^*	n_i	$x_i^* n_i$	$(x_i^* - \bar{x}_в)n_i$	$n_i(x_i^* - \bar{x}_в)^2$	$(x_i^*)^2 n_i$	$n_i(x_i^* - \bar{x}_в)^3$	$n_i(x_i^* - \bar{x}_в)^4$
88,0625	4	352,25	-21,438	1838,27	31020,02	-39407,8	844805,1
94,1875	8	753,5	-15,313	1875,78	70970,28	-28722,9	439819,4
100,3125	13	1304,1	-9,188	1097,33	130813,8	-10081,7	92626,0
106,4375	27	2873,8	-3,063	253,23	305881,4	-775,5	2375,0
112,5625	23	2588,9	3,063	215,71	291417,3	660,6	2023,2
118,6875	13	1542,9	9,188	1097,33	183127,4	10081,7	92626,0
124,8125	6	748,9	15,313	1406,84	93468,96	21542,2	329864,6
130,9375	6	785,6	21,438	2757,40	102867,8	59111,7	1267207,7
Σ	**100**	**10950**	**0,000**	**10541,9**	**1209567**	**12408,3**	**3071346,9**

А) Меры положения

Среднее выборочное значение:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} n_i x_i^* = \frac{1}{100}(88{,}0625 \cdot 4 + 94{,}1875 \cdot 8 + 100{,}3125 \cdot 13 + 106{,}4375 \cdot 27 +$$

$$+112{,}5628 \cdot 23 + 118{,}6875 \cdot 13 + 124{,}8125 \cdot 6 + +130{,}9375 \cdot 6) = \frac{10950}{100} = 109{,}5 \ \textit{чел.}$$

В течение наблюдаемого времени один авиарейс в среднем перевозил 109,5 пассажиров.

Медиана: $x_{med} = 103{,}375 + 6{,}125 \cdot \dfrac{50 - 25}{27} = 109{,}046$ чел.

Медиану также можно определить, как значение случайной величины X, расположенное между $x_{n/2}$ и $x_{(n/2)+1}$ при четном n. x_{50}, x_{51} определяем по ряду 1, как значения, распложенные напротив накопленных частот 50 и 51:

$$x_{med} = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{109 + 109}{2} = 109 \text{ чел.}$$

Мода: $x_{\text{mod}} = 103{,}375 + 6{,}125 \cdot \dfrac{27 - 13}{27 \cdot 2 - 13 - 23} = 108{,}139$ чел.

По ряду 1 x_{mod} – это значение, соответствующее наибольшей частоте, следовательно, $x_{\text{mod}} = 108$ или 109 (значения, стоящие напротив частот $n_{17,18} = 7$).

Таким образом, наиболее часто встречающееся число пассажиров одного авиарейса составляет 108 чел., средневероятное – 109 чел.

Б) Меры разброса (рассеяния)

Дисперсия:

$$D_в = \frac{1}{100}(1838{,}27 + 1875{,}78 + 1097{,}33 + 253{,}23 + 215{,}71 + 1097{,}33 + 1406{,}84 +$$
$$+ 2757{,}40) = \frac{10541{,}9}{100} = 105{,}419.$$

Дисперсию также можно вычислить по второй формуле:

$$D_в = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 \cdot n_i - (\bar{x}_в)^2 = \frac{1209567}{100} - (109{,}5)^2 = 105{,}419\,.$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{105{,}419} = 10{,}27$ чел.

Коэффициент вариации: $V_в = \dfrac{10{,}27}{109{,}5} \cdot 100\% = 9{,}38\%$.

Абсолютное отклонение от среднего значения составляет $\pm 10{,}27$ чел., относительное отклонение от среднего равно 9,38%.

В) Меры формы

Выборочный коэффициент асимметрии: $A_s = \dfrac{124{,}083}{10{,}27^3} = 0{,}115$, где

$$\mu_3 = \frac{12408{,}3}{100} = 124{,}083\,.$$

Выборочный коэффициент эксцесса: $E_k = \dfrac{30713{,}469}{10{,}27^4} - 3 = -0{,}236$, где

$$\mu_4 = \frac{3071346{,}9}{100} = 30713{,}469\,.$$

Положительное значение коэффициента асимметрии говорит о том, что более длинная часть графика находится справа от вершины. Отрицательное значение коэффициента эксцесса говорит о плосковершинности кривой распределения.

8. Вывод о близости наблюдаемого распределения к нормальному:

1) Полигон частот имеет колоколообразный вид;

2) $\bar{x}_в \approx x_{\mathrm{mod}} \approx x_{med}$: $109{,}5 \approx 109{,}046 \approx 108{,}139$;

3) Значения коэффициентов асимметрии и эксцесса близки к нулю;

4) коэффициент вариации меньше 33%.

Таким образом, на основании проделанных расчетов можно сделать вывод о близости наблюдаемого распределения случайной величины X – числа пассажиров одного авиарейса «Иркутск–Москва» или «Москва–Иркутск» к нормальному.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Анапольский Л.Ю., Никулина С.И. Сборник Пример по математике в экономике. Ч. 2. Линейная алгебра. Функции многих переменных. – Иркутск : изд-во ИГЭА, – 2001. – 142 с.
2. Дыхта В.А. Линейная алгебра и экономические модели. Серия «Основы математики для экономистов». Выпуск 6. Учебное пособие. – Иркутск. Изд. ИГЭА, – 1997. – 234с.
3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, – 2007. – 479 с.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебн. /Под. ред. Тихонова А.Н. М. : Высшая школа, 1985, 1989, 1990 – 2009. – 600 с.
5. Никифорова И.А. Сборник задач по математике в экономике. Ч. 1. введение в анализ, дифференциальное, интегральное исчисление функции одной переменной. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2008 – 190 с.
6. Задачи и упражнения по теории вероятностей. учеб. пособие/ сост. Л. Н. Ежова [и др.].- Иркутск: Изд-во ИГЭА, 2002.– 85 с.
7. Ежова Л. Н. Эконометрика: начальный курс с основами теории вероятностей и математической статистики : учеб. пособие. Изд. 2-е, испр. и перераб./ Л. Н. Ежова.- Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2008. – 287 с.

Дополнительная литература

8. Красс М.С. Математика для экономических специальностей : учебник для вузов. – М. : ДЕЛО, – 2002, – 704 с.
9. Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др. Практикум по высшей математике для экономистов : учеб. пособие для вузов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, – 2004, – 423 с.
10. Никольский С.М., Бугров Я.С. Высшая математика : учеб. для вузов: В 3 т. / Т.1 : Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М. : Дрофа, – 2004. – 288 с.
11. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие для втузов. – М. : Физматлит, – 2008. – 336 с.
12. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике : учебник: В 2-х ч. Ч.1. – М. : Финансы и статистика, – 2003. – 384 с.
13. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. рек. М-вом образования РФ. учеб. пособие для бакалавров. 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2013. – 405 с.
14. Битнер Г.Г. Теория вероятностей : учеб. пособие для вузов. допущено М-вом образования и науки РФ / Г. Г. Битнер. – Ростов н/Д : Феникс, 2012. – 330 с.

Электронные ресурсы

15. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум. – М. : ЮРАЙТ, – 2012. – 910 с. Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/index.php?page=book&id=57714.

16. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, – 2012. – 482 с. Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541.

17. Геворкян Л.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М. : ФИЗМАТЛИТ, – 2011. – 207 с. – Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=82792.

18. Романников А.Н. Линейная алгебра. – М: Изд-во Московского государственного университета экономики, статистики и информатики, – 2007. – 148 с. Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=91062.

19. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник Юнити-Дана, 2015: 352с. Режим доступа: URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=436721&sr=1.

20. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. – М. : Юнити-Дана, 2015. – 352 с. : табл. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436721.

Учебное издание

Леонова Ольга Васильевна
Шерстянкина Нина Павловна

МАТЕМАТИКА

Курс лекций

Учебное пособие для студентов очной
и заочной форм обучения направления
43.03.02 Туристский и гостиничный бизнес

Издается в авторской редакции

Подписано в пользование 09.06.18.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.

http://bgu.ru.